オペレーションズ・リサーチ

経営情報学科

福井正康

目次

１章 オペレーションズ・リサーチとは

オペレーションズ・リサーチ（Operations Research, OR）

OR とは

計画や管理の主に数量的側面に焦点をあて、社会や企業の活動の中に内在する法則性を知り、これを意思決定の一助とする学問である。

［**森雅夫**］

OR の歴史

イギリス

1935-1939 **第２次世界大戦直前のレーダー開発**
開発の運用面での研究を Operational Research **と命名**（A.P.**ロウ**）
後に軍事面へ浸透

1941 **対潜水艦用爆雷の信管調整問題**

1948 OR **クラブの設立　後にイギリス** OR **学会へ**

1951 **待ち行列理論**

アメリカ

1940 **軍事研究機関** NDRC (National Defense Research Committee)

1942 **陸・海・空軍** Operations Research **グループ**

1944 **ゲームの理論**

1948 **線形計画法**

1949 **情報理論**

1952 **動的計画法**

日本

1951 **日本科学技術連盟** OR **研究委員会**

1957 **日本オペレーションズ・リサーチ学会**

現在の OR 像

- **自然科学・社会科学等にまたがる学際的科学**
- **意思決定者の合理的な判断を支援する科学的方法**
- **問題解決技法**
- **モデルの構築**
- **ソフトサイエンスの一翼を担う**

OR の手法

教科書 p22 **参照**

２章 線形計画法

線形計画法（Linear Programming, LP）

2.1 LP の例

問題

原料の供給量の範囲内で、利益が最大となる製品の生産量は？

原料＼製品	1	2	原料の供給量（kg）
A	1	3	６０
B	3	4	１００
C	2	1	５０
製品１単位当りの利益（万円）	5	6	

問題の定式化

目的関数 (objective function)

$$z = 5x_1 + 6x_2$$ **利益の最大化**

制約条件 (constraints)

$$x_1 + 3x_2 \leq 60$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 100$$
$$2x_1 + x_2 \leq 50$$
$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0$$

グラフによる解法

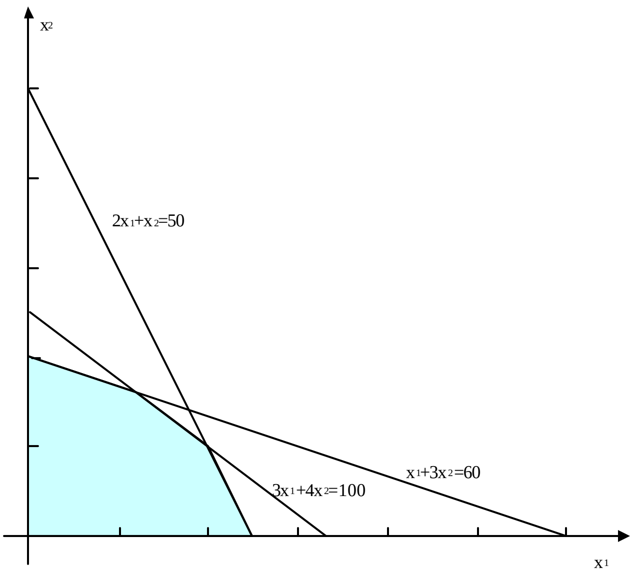


図　制約式の許容範囲

$$3x_1 + 4x_2 = 100$$
$$2x_1 + x_2 = 50$$
から
$$x_1 = 20, x_2 = 10$$

$z = 5x_1 + 6x_2$ に代入して
$$z = 160$$

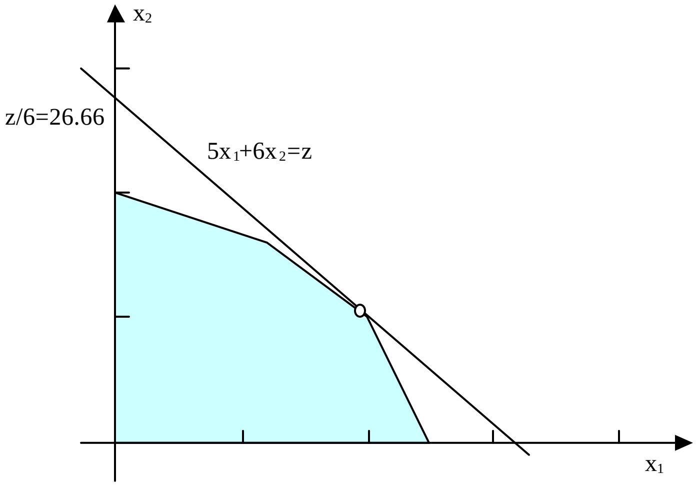


図　最大値

2.2 シンプレックス法

単体法／シンプレックス法 (simplex method)

$z = 5x_1 + 6x_2$　**最大化**

$x_1 + 3x_2 \le 60$

$3x_1 + 4x_2 \le 100$　　**制約式を満たす解は見つけにくい**

$2x_1 + x_2 \le 50$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

そこで、スラック変数 (slack variable) x_3, x_4, x_5 **を導入して以下の問題を考える。**

Step 0

$z = 5x_1 + 6x_2$ $(z - 5x_1 - 6x_2 = 0)$

$x_1 + [3x_2] + x_3 = 60$

$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 100$

$2x_1 + x_2 + x_5 = 50$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$

解は

$x_1 = 0,\ x_2 = 0,$

$x_3 = 60,\ x_4 = 100,\ x_5 = 50$

$\to z = 0$

特徴

x_3, x_4, x_5　**基底変数**(basic variable)　　**制約式の中に１回だけ現れる**

x_1, x_2　**非基底変数**(non-basic variable)　　**値が** 0

目的関数の式には非基底変数だけが現れる

x_1, x_2 どちらの変数を正にしたら z を増加させるのに効率が良いか？

答　係数が最大のもの x_2（左辺に移した場合は最小のもの）

x_2 はどこまで増やせるか？

1 **式** 60/3=20，2 **式** 100/4=25，3 **式** 50

20 **より大きくすると** $x_3 < 0$ **となる。**

以上より、$x_2 \to 20$ とするが、同時に $x_3 \to 0$ ともなる。

式の変形（x_2 を基底変数に、x_3 を非基底変数にするように）

1 **式の** x_2 **の係数を** 1 **にする。**

$$\frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 20$$

他の制約式から x_2 を消す。

$$\frac{5}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_3 + x_4 \quad = 20$$

$$\frac{5}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 \quad + x_5 = 30$$

目的関数式から x_2 を消す。

$$z - 3x_1 + 2x_3 = 120$$

以上の操作をピボット操作(pivot operation)**という。**

ピボット操作はサイクル(cycle)**という名前で回数を数える。**

Step 1

$$z = 3x_1 - 2x_3 + 120 \quad (z - 3x_1 + 2x_3 = 120)$$

$$\begin{aligned} &1/3\,x_1 + x_2 + 1/3\,x_3 && = 20 \\ &[5/3\,x_1] \quad - 4/3\,x_3 + x_4 && = 20 \\ &5/3\,x_1 \quad - 1/3\,x_3 \quad + x_5 && = 30 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

解は
$$\begin{aligned} &x_1 = 0,\ x_3 = 0, \\ &x_2 = 20,\ x_4 = 20,\ x_5 = 30 \\ &\to z = 120 \end{aligned}$$

以後同様な操作を進める

Step 2

$$z = 2/5\,x_3 - 9/5\,x_4 + 156 \quad (z - 2/5\,x_3 + 9/5\,x_4 = 156)$$

$$\begin{aligned} x_2 + 3/5\,x_3 - 1/5\,x_4 \qquad &= 16 \\ x_1 \quad - 4/5\,x_3 + 3/5\,x_4 \qquad &= 12 \\ x_3 \quad - x_4 + x_5 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & \end{aligned}$$

解は $x_3 = 0,\ x_4 = 0,$ $x_1 = 12,\ x_2 = 16,\ x_5 = 10$ $\rightarrow z = 156$

Step 3

$$z = -7/5\,x_4 - 2/5\,x_5 + 160 \quad (z + 7/5\,x_4 + 2/5\,x_5 = 160)$$

$$\begin{aligned} x_2 + 2/5\,x_4 - 3/5\,x_5 &= 10 \\ x_1 \quad - 1/5\,x_4 + 4/5\,x_5 &= 20 \\ x_3 \quad - x_4 \quad + x_5 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & \end{aligned}$$

解は $x_4 = 0,\ x_5 = 0,$ $x_1 = 20,\ x_2 = 10,\ x_3 = 10$ $\rightarrow z = 160$

これは、x_4, x_5 を大きくしたら z の値は小さくなる。

$x_4 = 0,\ x_5 = 0,$ $x_1 = 20,\ x_2 = 10,\ x_3 = 10$ **のとき　最大値** $z = 160$

2.3 シンプレックス表

回数	基底変数	x1	x2	x3	x4	x5	右辺
0	z	-5	-6	0	0	0	0
	x3	1	(3)	1	0	0	60
	x4	3	4	0	1	0	100
	x5	2	1	0	0	1	50
1	z	-3	0	2	0	0	120
	x2	1/3	1	1/3	0	0	20
	x4	(5/3)	0	-4/3	1	0	20
	x5	5/3	0	-1/3	0	1	30
2	z	0	0	-2/5	9/5	0	156
	x2	0	1	3/5	-1/5	0	16
	x1	1	0	-4/5	3/5	0	12
	x5	0	0	(1)	-1	1	10
3	z	0	0	0	7/5	2/5	160
	x2	0	1	0	2/5	-3/5	10
	x1	1	0	0	-1/5	4/5	20
	x3	0	0	1	-1	1	10

2.4 シンプレックス法の幾何学的意味

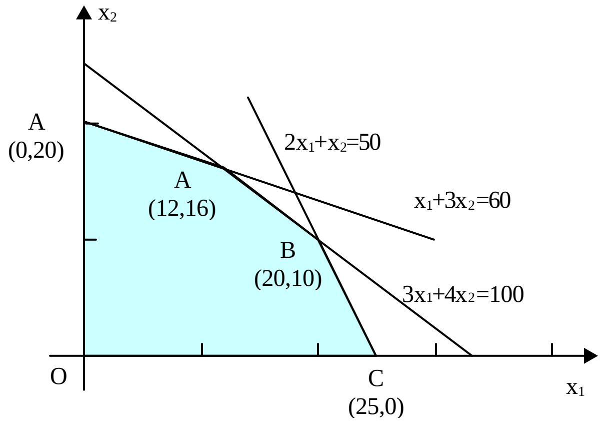


図　シンプレックス法の幾何学的意味

各ステップの x_1，x_2 **の値をたどってみる。**

Step 0 → Step 1 (Cycle 1)

$x_1 = 0,\ x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 20$　　　**点** O → **点** A

Step 1 → Step 2 (Cycle 2)

$x_1 = 0,\ x_2 = 20 \rightarrow x_1 = 12,\ x_2 = 16$　　　**点** A → **点** B

Step 2 → Step 3 (Cycle 3)

$x_1 = 12,\ x_2 = 16 \rightarrow x_1 = 20,\ x_2 = 10$　　　**点** B → **点** C

シンプレックス法は、各頂点をたどって、最適解に導く手法である。

2.5 標準的な線形計画問題とピボット操作

標準的な線形計画問題とは？

1）最大化問題である

2）右辺が非負

3）変数が非負

4）不等号の向きが「≦」

目的関数

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$ **：最大化**

制約条件

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2$$
$$\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \cdots,\ x_n \ge 0$$

係数の条件

$$b_1 \ge 0, b_2 \ge 0, \cdots, b_m \ge 0$$

シンプレックス法

1）スラック変数を導入し、制約条件を等号条件にする。

$$z - c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_sx_s - \cdots - c_nx_n = 0$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$
$$\cdots$$
$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rs}x_s + \cdots + a_{rn}x_n + x_{n+r} = b_r$$
$$\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{ms}x_s + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \cdots,\ x_{n+m} \ge 0$$

注）但し、最初は $c_{n+1} = c_{n+2} = \cdots = c_{n+m} = 0$

2）最大の $c_s > 0$ **を選ぶ。**

3）最小の $b_r / a_{rs} \ge 0\ (a_{rs} > 0)$ **を選ぶ。**

4） a_{rs} **の項の係数を** 1 **にして、他の項から引く。**

（ x_{n+r} **を基底変数から除き、** x_s **を基底変数に入れる。）**

$$b'_r = b_r / a_{rs} \ge 0$$
$$b'_i = b_i - b_r a_{is} / a_{rs} \ge 0 \quad i \ne r$$

$a_{is} > 0$ **の場合は** $b'_i = a_{is}(b_i / a_{is} - b_r / a_{rs}) \ge 0$ **（最小）**

$a_{is} = 0$ **の場合は** $b'_i = b_i \ge 0$

$a_{is} < 0$ **の場合は** $b'_i \ge b_i \ge 0$

$$z - c'_1x_1 - c'_2x_2 - \cdots - 0 \cdot x_s - \cdots - c'_nx_n - c_s / a_{rs}\ x_{n+r} = c_sb_r / a_{rs}$$

目的関数は $c_sb_r / a_{rs} \ge 0$ **増加する。**

以上から、pivot **操作により、目的関数は増加し（増加しない場合もある）、右辺の非負性は保たれる。**

注意）目的関数が増加しない場合は、ピボット操作が循環する可能性があるが、現実問題ではほとんど起こらず、また起こった場合でも解決方法は考案されている。

（省略）

終了条件について

1）すべての $c_i \le 0$ ならば、

最適解（z は最大）

2）$c_s > 0$ に対してすべての $a_{is} \le 0$ ならば、

いくらでも大きな解が存在する！

例 $z = x_1 + x_2$ 最大化

$$2x_1 - 3x_2 \le 6$$
$$-x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

Step	基底変数	x_1	x_2	x_3	x_4	右辺
0	z	-1	-1	0	0	0
	x_3	[2]	-3	1	0	6
	x_4	-1	1	0	1	8
1	z	0	-5/2	1/2	0	3
	x_1	1	-3/2	1/2	0	3
	x_4	0	-1/2	1/2	1	11

$$z = 5/2\,x_2 - 1/2\,x_3 + 3$$
$$-3/2\,x_2 + 1/2\,x_3 + x_1 = 3$$
$$-1/2\,x_2 + 1/2\,x_3 + x_4 = 11$$

これには、以下の解が存在する。

$$x_2 = t,\ x_1 = 3/2\,t + 3,\ x_4 = 1/2\,t + 11,\ x_3 = 0$$
$$z = 5/2\,t + 3$$

これは t の値によって、z をいくらでも大きく出来る。

2.6 等号条件の線形計画問題

例

目的関数

$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$ 最大化

制約条件

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 60$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 40$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

シンプレックス法の適用（可能か？）

$$z - 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \qquad \textbf{最大化}$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 60$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 40$$

これでは、初期可能解として、 $x_4 = 60,\ x_5 = 40$ **と出来ない。**
そこで、別の初期可能解を見つける方法が必要になる。

初期可能解を見つけるために、元の問題から離れ、新たに以下の問題を考える。

$$w = x_4 + x_5 \qquad \textbf{最小化}$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 60$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 40$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

これは、うまくゆけば、 $x_4 = x_5 = 0$ **の解が得られるが、２つの問題がある。**

１）目的関数に変数 x_4, x_5 **が含まれる。**

２）最大化問題でない。

最初の問題解決のために、制約条件を用いて目的関数からこれらの変数を消す。

$$
\begin{array}{rl}
 & w - x_4 - x_5 = 0 \\
 & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 60 \\
+) & x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 40 \\
\hline
 & w + 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 100
\end{array}
\qquad \textbf{最小化}
$$

このままでも、簡単に問題は解けるが、標準的な線形計画問題に直すために、両辺に -1 **を掛けて最大化問題にする。**

$$-w - 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -100 \qquad \textbf{最大化}$$

また、次の段階への移行のため、元々の目的関数も加えて、以下のように定式化される。

$$-w-2x_1-6x_2-3x_3=-100$$ **第１段階目的関数　最大化**

$$z-3x_1-2x_2-x_3=0$$ **第２段階目的関数**

$$x_1+2x_2+2x_3+x_4=60$$

$$x_1+4x_2+x_3+x_5=40$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

シンプレックス表による計算

第１段階

Step	**基底変数**	x1	x2	x3	x4	x5	**右辺**
0	-w	-2	-6	-3	0	0	-100
	z	-3	-2	-1	0	0	0
	x4	1	2	2	1	0	60
	x5	1	[4]	1	0	1	40
1	-w	-1/2	0	-3/2	0	3/2	-40
	z	-5/2	0	-1/2	0	1/2	20
	x4	1/2	0	[3/2]	1	-1/2	40
	x2	1/4	1	1/4	0	1/4	10
2	-w	0	0	0	1	1	0
	z	-7/3	0	0	1/3	1/3	100/3
	x3	1/3	0	1	2/3	-1/3	80/3
	x2	1/6	1	0	-1/6	1/3	10/3

ここで、$x_4=x_5=0$ であり、これら２つの変数を取り除いても、基底形式は保たれている。そこで、さらに計算を進める。

第２段階

Step	**基底変数**	x1	x2	x3	**右辺**
2	z	-7/3	0	0	100/3
	x3	1/3	0	1	80/3
	x2	1/6	1	0	10/3
3	z	0	14	0	80
	x3	0	-2	1	20
	x1	1	6	0	20

最適解　$x_1=20, x_2=20, x_3=0$　**のとき**　$z=80$

２段階法の特別な例

$$z=3x_1+2x_2+x_3$$ **最大化**

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 40$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

シンプレックス表

第１段階

Step	基底変数	x1	x2	x3	x4	x5	右辺
0	-w	-2	-3	-3	0	0	-60
	z	-3	-2	-1	0	0	0
	x4	1	[1]	1	1	0	20
	x5	1	2	2	0	1	40
1	-w	1	0	0	3	0	0
	z	-1	0	1	2	0	40
	x2	1	1	1	1	0	20
	x5	-1*	0	0	-2	1	0
1’	-w	0	0	0	1	1	0
	z	0	0	1	4	-1	40
	x2	0	1	1	-1	1	20
	x1	1	0	0	2	-1	0

第２段階

Step	基底変数	x1	x2	x3	右辺
1	z	0	0	1	40
	x2	0	1	1	20
	x1	1	0	0	0

制約条件に不等号と等号が混じる例

$$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad \textbf{最大化}$$
$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1$$

初期シンプレックス表

Step	基底変数	x1	x2	x3	xs4	xa5	xa6	右辺
0	-w	-3	-3	1	0	0	0	-4
	z	-2	-3	-1	0	0	0	0
	xs4	5	2	3	1	0	0	10
	xa5	2	1	1	0	1	0	3
	xa6	1	2	-2	0	0	1	1

注）-w の式は人為変数が入った式だけの合計で作る。

そうでないと、-w の式の中に基底変数が入る。

2.7 その他の線形計画問題

1）最小化問題の場合

$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$　**最小化　の場合**

$-z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n$　**最大化　として解いてもよい。**

2）右辺が負の場合

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i < 0$　**の場合**

$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n = -b_i > 0$　**として解く。**

3）変数に非負条件がない場合

$x_i \geq 0$　**でない場合**

$x_i = x_i^+ - x_i^-,\ x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0$　**として変数を置き換えて解く。**

4）不等号の向きが逆の場合

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \geq 0$　**の場合**

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+j} = b_i$　**として、スラック変数を入れ、**

等号制約問題として解く。

演習　以下の線形計画問題から初期シンプレックス表を求めよ。

1）　$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$　**最大化**

$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 20$

$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$

$x_1, x_2, x_3 = 0$

初期シンプレックス表

Step	基底変数	x1	x2	x3	xs4	xs5	xa6	xa7	右辺
0	-w	-5	1	-2	0	1	0	0	-7
	z	-2	-3	-1	0	0	0	0	0
	xs4	3	2	5	1	0	0	0	20
	xa6	4	-2	1	0	0	1	0	5
	xa7	1	1	1	0	-1	0	1	2

2） $z = x_1 + 2x_2$

$-2x_1 + x_2 \geq -2$

$x_1 + x_2 = 4$

$x_1 \geq 0$

Step	基底変数	x1	x2+	x2-	xs4	xa5	右辺
0	-w	-1	-1	1	0	0	-4
	z	1	2	-2	0	0	0
	xs4	2	-1	1	1	0	2
	xa5	1	1	-1	0	1	4

2.8 線形計画法の行列表示

例

目的関数

$$z = x_1 + x_2$$

制約条件

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

シンプレックス表

Step	基底変数	x1	x2	x3	x4	右辺
0	z	-1	-1	0	0	0
	x3	[2]	1	1	0	6
	x4	1	2	0	1	8
1	z	0	-1/2	1/2	0	3
	x1	1	1/2	1/2	0	3
	x4	0	[3/2]	-1/2	1	5
2	z	0	0	1/3	1/3	14/3
	x1	1	0	2/3	-1/3	4/3
	x2	0	1	-1/3	2/3	10/3

シンプレックス法の初期基底形式は、

$$z - (1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$
\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8 \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}
$$

より、

$$
\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}
$$

として、以下のように書ける。

$$
z - {}^t\mathbf{c}\mathbf{x} = 0
$$

$$
\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}
$$

シンプレックス法の最終結果はどうなるのであろうか。

最終的に基底変数が、x_1, x_2 となることから、1 列と 2 列を取り出して、

$$
\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{として、} \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}
$$

より、シンプレックス法の最終ステップは以下のように書ける。

$$
\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}
$$

目的関数については、

$$
z - {}^t\mathbf{c}\mathbf{x} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0
$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ax}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}$$

及び、係数 c の最終的な基底変数の部分 $\mathbf{c}_B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **を用いて、**

$${}^t\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ax}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$${}^t\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}=14/3$$

$$z-{}^t\mathbf{cx}+{}^t\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ax}=z-({}^t\mathbf{c}-{}^t\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

より、以下となる。

$$z-({}^t\mathbf{c}-{}^t\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}={}^t\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

結局、各 Step **毎に、その時の基底変数の組から、**$\mathbf{B}, \mathbf{c}^B$ **を作り、以下のように行列形式で表現することが出来る。**

目的関数

$$z-({}^t\mathbf{c}-{}^t\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}={}^t\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

制約条件

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ax}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$$

基底解について

変数 $\mathbf{x}$ **の基底成分を** $\mathbf{x}_B$**、非基底成分を** $\mathbf{x}_N$**、係数** $\mathbf{c}$ **の基底変数の係数** $\mathbf{c}_B$ **と非基底変数の係数** $\mathbf{c}_N$ **に分けると、基底解は以下のように表される。**

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_N = \mathbf{0}$$

$$z = {}^t\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

2.9 **双対問題**

1. **双対問題とは**

主問題

$$z = 5x_1 + 6x_2 \qquad \textbf{最大化}$$
$$x_1 + 3x_2 \le 60$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 100$$
$$2x_1 + x_2 \le 50$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

双対問題

$$z' = 60y_1 + 100y_2 + 50y_3 \quad \textbf{最小化}$$
$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ge 5$$
$$3y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 6$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

以上を行列で書くと、

主問題	**双対問題**
$z = {}^t\mathbf{c}\mathbf{x}$ **最大化**	$z' = {}^t\mathbf{b}\mathbf{y}$ **最小化**
$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$	${}^t\mathbf{A}\mathbf{y} \ge \mathbf{c}$, $\mathbf{y} \ge \mathbf{0}$

2. **一般的な双対問題**

$$\begin{array}{l} z = 2x_1 + x_2 \quad \textbf{最大化} \\ 2x_1 + 3x_2 \le 4 \\ x_1 + 4x_2 = 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} z' = 4y_1 + 5y_2 \quad \textbf{最小化} \\ 2y_1 + y_2 \ge 2 \\ 3y_1 + 4y_2 \ge 1 \\ y_1 \ge 0 \end{array}$$

等号 ⇔ 非負条件なし

$$\begin{array}{l} z = 2x_1 + x_2 \quad \textbf{最大化} \\ 2x_1 + 3x_2 \le 4 \\ x_1 + 4x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} z' = 4y_1 + 5y_2 \quad \textbf{最小化} \\ 2y_1 + y_2 \ge 2 \\ 3y_1 + 4y_2 = 1 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0 \end{array}$$

非負条件なし ⇔ 等号

$$z = 2x_1 + x_2 \quad \textbf{最大化} \qquad\qquad z' = 4y_1 - 5y_2 \quad \textbf{最小化}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\le 4 \\ x_1 + 4x_2 &\ge 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2y_1 - y_2 &\ge 2 \\ 3y_1 - 4y_2 &\ge 1 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

（$-x_1 - 4x_2 \le -5$）**右辺の正値性は双対問題を作る際には問わない。**

問　以下の主問題の双対問題を示せ。

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \quad \textbf{最大化}$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 \le 3$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

解答

$$z' = 4y_1 + 3y_2 \quad \textbf{最小化}$$
$$y_1 + 2y_2 \ge 3$$
$$2y_1 + y_2 \ge 2$$
$$y_1 - y_2 = 1$$
$$y_2 \ge 0$$

双対問題を議論する場合には、右辺の正値性を取り除き、不等号を最大化問題の場合「≦」に、最小化問題のときには「≧」方向に向かせて考える。

主問題　　　　　　　　　　　　　　**双対問題**

$$z = {}^t\mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + {}^t\mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 \quad \textbf{最大化} \qquad\qquad z' = {}^t\mathbf{b}_1\mathbf{y}_1 + {}^t\mathbf{b}_2\mathbf{y}_2 \quad \textbf{最小化}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 &\le \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 &= \mathbf{b}_2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} {}^t\mathbf{A}_{11}\mathbf{y}_1 + {}^t\mathbf{A}_{21}\mathbf{y}_2 &\ge \mathbf{c}_1 \\ {}^t\mathbf{A}_{12}\mathbf{y}_1 + {}^t\mathbf{A}_{22}\mathbf{y}_2 &= \mathbf{c}_2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_1 \ge \mathbf{0} \qquad\qquad \mathbf{y}_1 \ge \mathbf{0}$$

3. **弱双対定理**

主問題の最大値と双対問題の最小値の関係

1) **不等号制約の場合**

主問題　　　　　　　　　　　　　　**双対問題**

$$z = {}^t\mathbf{c}\mathbf{x} \quad \textbf{最大化} \quad \Leftrightarrow \quad z' = {}^t\mathbf{b}\mathbf{y} \quad \textbf{最小化}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b},\quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \qquad\qquad {}^t\mathbf{A}\mathbf{y} \ge \mathbf{c},\ \mathbf{y} \ge \mathbf{0}$$

$$z={}^t\mathbf{cx} \le {}^t\mathbf{yAx} \le {}^t\mathbf{yb} = {}^t\mathbf{by} = z' \qquad \rightarrow \qquad z \le z'$$

x の正値性，y の正値性が必要

2) **等号制約の場合**

主問題 **双対問題**

$$z={}^t\mathbf{cx} \quad \text{最大化} \qquad \Leftrightarrow \qquad z'={}^t\mathbf{by} \quad \text{最小化}$$

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b},\quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \qquad\qquad {}^t\mathbf{Ay} \ge \mathbf{c}$$

$$z={}^t\mathbf{cx} \le {}^t\mathbf{yAx} = {}^t\mathbf{yb} = {}^t\mathbf{by} = z' \qquad \rightarrow \qquad z \le z'$$

x の正値性が必要，y の正値性は不要

3) **混合している場合**

$$
\begin{aligned}
z &= {}^t\mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + {}^t\mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 \\
&\le ({}^t\mathbf{y}_1\mathbf{A}_{11} + {}^t\mathbf{y}_2\mathbf{A}_{21})\mathbf{x}_1 + ({}^r\mathbf{y}_1\mathbf{A}_{12} + {}^t\mathbf{y}_2\mathbf{A}_{22})\mathbf{x}_2 \\
&= {}^t\mathbf{y}_1(\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2) + {}^t\mathbf{y}_2(\mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + {}^t\mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2) \\
&\le {}^t\mathbf{y}_1\mathbf{b}_1 + {}^t\mathbf{y}_2\mathbf{b}_2 = {}^t\mathbf{b}_1\mathbf{y}_1 + {}^t\mathbf{b}_2\mathbf{y}_2 = z'
\end{aligned}
$$

4. 双対定理

双対定理

主問題あるいは双対問題が最適解を持てば、他方も最適解を持ち、それらの最適目的関数値は一致する。

証明

主問題には予め必要な部分にスラック変数を入れて、等号問題としておく。

主問題 **双対問題**

$$z={}^t\mathbf{cx} \quad \text{最大化} \qquad \Leftrightarrow \qquad z'={}^t\mathbf{by} \quad \text{最小化}$$

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b},\quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \qquad\qquad {}^t\mathbf{Ay} \ge \mathbf{c}$$

ある基底行列の逆行列を用いて、新しい基底形式となるようにする。

$$z - ({}^t\mathbf{c} - {}^t\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} = {}^t\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \tag{1}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \tag{2}$$

今、この基底解が最適解 $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$ であるとする。

(2)**式より、最適解の基底変数は、以下である。**

$$\mathbf{x}_B^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$z^* = {}^t\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

また、(1)式より、これが最適解であることから、左辺の x の係数はすべて正である必要があるので,

$${}^t\mathbf{c}' - {}^t\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \le \mathbf{0} \qquad \text{すなわち、} \quad {}^t\mathbf{A}\,{}^t\mathbf{B}^{-1}\mathbf{c}_B \ge \mathbf{c} \qquad (3)$$

さて今、$\mathbf{y} = {}^t\mathbf{B}^{-1}\mathbf{c}_B$ とおくと、(3)を用いて、

$${}^t\mathbf{A}\mathbf{y} = {}^t\mathbf{A}\,{}^t\mathbf{B}^{-1}\mathbf{c}_B \ge \mathbf{c}$$

となり、y は双対問題の 1 つの解である。しかも、

$$z^* = {}^t\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = {}^t\mathbf{y}\mathbf{b} = {}^t\mathbf{b}\mathbf{y} = z'$$

であるので、$z^* = z'$ となっている。

　弱双対定理より、任意の x と y に対して、$z \le z'$ であり、$z = z'$ となるのは z が最大、z' が最小の場合以外にない。すなわち、$\mathbf{y} = {}^t\mathbf{B}^{-1}\mathbf{c}_B$ は、双対問題の最小解、すなわち最適解である。

5. 主問題と双対問題の適用判断

変数の数	多い	少ない
制約の数	少ない	多い
	主問題が適	双対問題が適

理由

方程式の数が多い場合、スラック変数や人為変数などをいれると、変数の数も増えてくるので、ピボット操作（または逆行列計算）も手間がかかり、計算に時間がかかる。方程式の数が少ない場合は、ピボット操作の計算（または逆行列計算）も楽になり、時間短縮が図られる。

2.10 相補性定理

1. 不等号制約の相補性定理

主問題

$$z = {}^t\mathbf{c}\mathbf{x} \quad \text{最大化}$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}_s = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{x}_s \ge \mathbf{0} \end{array} \qquad (1)$$

双対問題

$$z' = {}^t\mathbf{b}\mathbf{y} \quad \text{最小化}$$

$$\begin{array}{l} {}^t\mathbf{A}\mathbf{y} \ge \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \ge \mathbf{0} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} {}^t\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{y}_s = \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{y}_s \ge \mathbf{0} \end{array} \qquad (2)$$

以上の定式化に対して、次の相補性定理が成り立つ。

$$\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{y}, \mathbf{y}_s \text{ が最適解である。} \quad \Leftrightarrow \quad {}^t\mathbf{y}\mathbf{x}_s = {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}_s = 0$$

証明

(1) **より、**${}^t\mathbf{y}\mathbf{A}\mathbf{x} + {}^t\mathbf{y}\mathbf{x}_s = {}^t\mathbf{y}\mathbf{b} = z'$

(2) **より、**${}^t\mathbf{x}{}^t\mathbf{A}\mathbf{y} - {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}_s = {}^t\mathbf{x}\mathbf{c} = z$

以上より、

$$z' - z = {}^t\mathbf{y}\mathbf{x}_s + {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}_s$$

最適解の場合は双対性定理より $z = z'$ **であり、右辺の２項とも非負であるから、**

$$ {}^t\mathbf{y}\mathbf{x}_s = {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}_s = 0 \qquad (3)$$

逆に、(3) **が成り立つときは、** $z = z'$ **となり、双対性定理より最適解となる。**

注意

$$ {}^t\mathbf{x}({}^t\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{y}_s - \mathbf{c}) = {}^t\mathbf{x}{}^t\mathbf{A}\mathbf{y} - {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}_s - {}^t\mathbf{x}\mathbf{c}$$
$$= z' - {}^t\mathbf{y}\mathbf{x}_s - {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}_s - z$$
$$= (z' - z) - ({}^t\mathbf{y}\mathbf{x}_s + {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}_s)$$

より、相補性の関係 ${}^t\mathbf{y}\mathbf{x}_s + {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}_s = 0$ **が成り立ち、最適解でない場合（**$z' > z$**）には、双対問題の制約条件が満たされない。**

2. 等号制約の相補性定理

主問題

$$z = {}^t\mathbf{c}\mathbf{x} \quad \text{最大化}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad (1)$$

双対問題

$$z' = {}^t\mathbf{b}\mathbf{y} \quad \text{最小化}$$
$$ {}^t\mathbf{A}\mathbf{y} \geq \mathbf{c} \quad \rightarrow \quad {}^t\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{y}_s = \mathbf{c}, \quad \mathbf{y}_s \geq \mathbf{0} \qquad (2)$$

相補性定理

$$ {}^t\mathbf{y}\mathbf{A}\mathbf{x} = {}^t\mathbf{y}\mathbf{b} = z' \qquad \leftarrow (1)$$
$$ {}^t\mathbf{x}{}^t\mathbf{A}\mathbf{y} - {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}_s = {}^t\mathbf{x}\mathbf{c} = z \qquad \leftarrow (2)$$

最適解の場合　$\Leftrightarrow$　${}^t\mathbf{x}\mathbf{y}_s = 0$

2.11 **結果解釈のための指標**

被約費用（reduced cost）

${}^t\mathbf{c}^* = {}^t\mathbf{c} - {}^t\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$　**または、** $\mathbf{c}^* = \mathbf{c} - {}^t\mathbf{A}\,{}^t\mathbf{B}^{-1}\mathbf{c}_B$

変数値を微小量変化させた際の目的関数の変化率

（基底変数の組が変化しない、非基底変数に関する価格低下の限度）

双対価格（dual prices）

$\mathbf{y}^* = {}^t\mathbf{B}^{-1}\mathbf{c}_B$　　**双対問題の解**

$z^* = {}^t\mathbf{y}^*\mathbf{b}$ **より、右辺を微小量変化させた際の目的関数の変化率**

感度分析の結果

基底変数の組が変化しない、目的関数または右辺定数の範囲

３章　ネットワーク計画法

3.1 輸送問題

1. 輸送問題とは

例　工場で生産した商品を各販売会社に配送する問題

表　単位商品当りの輸送コストと輸送量

	会社１	会社２	会社３	会社４	生産高
工場１	(7) x_{11}	(3) x_{12}	(2) x_{13}	(10) x_{14}	18
工場２	(9) x_{21}	(3) x_{22}	(6) x_{23}	(8) x_{24}	22
工場３	(8) x_{31}	(7) x_{32}	(8) x_{33}	(6) x_{34}	26
需要	12	20	16	18	66

( ) **内の数字を単位商品当りの輸送コストとして、生産高と需要との関係を満たしながら、総輸送コストを最小にする輸送量** x_{ij} **を求める。**

線形計画法による定式化

工場 i **から会社** j **への単位商品当りの輸送コストを** c_{ij} **、**

工場 i **の生産高を** a_i **、会社** j **の需要を** b_j **とすると。**

目的関数　$$z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij}$$ **最小化**

制約条件　$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = a_i,\quad \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j$$ **（独立なものは６つ），** $x_{ij} \geq 0$

輸送問題独特の解法（次節以降）

１）初期可能解を与える。

２）最適解に近づけて行く。

2. 初期可能解の与え方

１）北西隅の方法 (north-west corner method)

例

	会社１	会社２	会社３	会社４	生産
工場１	(7) 12	(3) 6	(2)	(10)	18
工場２	(9)	(3) 14	(6) 8	(8)	22
工場３	(8)	(7)	(8)	(6)	

			8	18	26
需要	12	20	16	18	66

北西隅から始めて、合計が超えないように隣り合う縦か横かのマスを埋めて行く規則
合計が一致した行（列）はないものと考えると、常に北西隅を埋めていることになる。

演習

	B1	B2	B3	total
A1	5			5
A2	1	10	4	15
total	6	10	4	20

	B1	B2	B3	B4	total
A1	14				14
A2	2	22	2		26
A3			14	12	26
total	16	22	16	12	66

他の方法に以下のものがある。

ハウザッカー法 (Houthakker method)

単位罰金法 (unit penalty method)

3. **解の改善手続き（飛び石法）**

例

	会社 1	**会社 2**	**会社 3**	**会社 4**	**生産**
工場 1	(7) 12	(3) 6	(2)	(10) 6	18
工場 2	(9)	(3) 14	(6) 8	(8)	22
工場 3	(8)	(7)	(8) 8	(6) 18	26
需要	12	20	16	18	66

総輸送費=120+18+42+48+64+108=400

他の輸送量のないところはそのままで、 x_{14} **を** 1 **単位増加させると、**

(1,4)→(1,2)→(2,2)→(2,3)→(3,3)→(3,4)→(1,4)

10 -3 +3 -6 +8 -6 =6

総輸送費は 6 **増加する。（総輸送費変化率は** 6**）**

総輸送費変化率をすべての空欄の（輸送量のない）部分で求める。

Step 0

	会社1	会社2	会社3	会社4	生産
工場1	(7) 12	(3) 6	(2) [-4]	(10) 6	18
工場2	(9) 2	(3) 14	(6) 8	(8) 4	22
工場3	(8) -1	(7) 2	(8) 8	(6) 18	26
需要	12	20	16	18	66

総輸送費=84+18+42+48+64+108=364

(1,3) 2-3+3-6=[-4]　　(1,4) 10-3+3-6+8-6=6

(2,1) 9-3+3-7=2　　(2,4) 8-6+8-6=4

(3,1) 8-8+6-3+3-7=-1　　(3,2) 7-8+6-3=2

変化率最小 -4 **の枝** (1,3)（**または** (3,1)）**に目をつけ、この輸送量がどこまで増やせるか考える。**

結局、輸送量を減少させる枝で値が最小である (1,2) **の輸送量** 6 **単位が** 0 **になるまで、枝** (1,3) **輸送量を** 6 **単位増やすことが出来る。これで、新しい表を作る。**

Step 1

	会社1	会社2	会社3	会社4	生産
工場1	(7) 12	(3) 4	(2) 6	(10) 10	18
工場2	(9) -2	(3) 20	(6) 2	(8) 4	22
工場3	(8) [-5]	(7) 2	(8) 8	(6) 18	26
需要	12	20	16	18	66

総輸送費=84+12+60+12+64+108 (=364-24) =340

(1,2) 3-3+6-2=4　　(1,4) 10-2+8-6=10

(2,1) 9-6+2-7=-2　　(2,4) 8-6+8-6=4

(3,1) 8-8+2-7=[-5]　　(3,2) 7-8+6-3=2

枝 (3,1) **を** 8 **増やすことができる。**

Step 2

	会社1	会社2	会社3	会社4	生産
工場1	(7) 4	(3) 4	(2) 14	(10) 5	18
工場2	(9)	(3)	(6)	(8)	

	[-2]	20	2	-1	22
工場 3	(8) 8	(7) 7	(8) 5	(6) 18	26
需要	12	20	16	18	66

総輸送費=28+28+60+12+64+108 (=340-40) =300

(1,2) 3-3+6-2=4　　(1,4) 10-7+8-6=5

(2,1) 9-6+2-7=[-2]　　(2,4) 8-6+2-7+8-6=-1

(3,2) 7-3+6-2+7-8=7　　(3,3) 8-2+7-8=5

枝 (2,1) **を** 2 **増やすことができる。**

Step 3

	会社 1	**会社 2**	**会社 3**	**会社 4**	**生産**
工場 1	(7) 2	(3) 2	(2) 16	(10) 5	18
工場 2	(9) 2	(3) 20	(6) 2	(8) 1	22
工場 3	(8) 8	(7) 5	(8) 5	(6) 18	26
需要	12	20	16	18	66

総輸送費=14+32+18+60+64+108 (=300-4) =296

(1,2) 3-7+9-3=2　　(1,4) 10-7+8-6=5

(2,3) 6-2+7-9=2　　(2,4) 8-9+8-6=1

(3,2) 7-3+9-8=5　　(3,3) 8-2+7-8=5

これ以上どの枝も増やすことはできない。　　**最適解**

4. 解の改善手続き（ポテンシャル法）

総輸送費変化率を求めるための手法

各会社、各工場に関するポテンシャル、u_i, v_j **を求める。**

step 0

	会社1	**会社2**	**会社3**	**会社4**	**生産**	u
工場1	(7) 12	(3) 6	(2) 2-0-6 =-4	(10) 10-0-4 =6	18	0
工場2	(9) 9-0-7 =2	(3) 14	(6) 8	(8) 8-0-4 =4	22	0
工場3	(8) 8-2-7 =-1	(7) 7-2-3 =2	(8) 8	(6) 18	26	2
需要	12	20	16	18	66	
v	7	3	6	4		

総輸送費=84+18+42+48+64+108=364

値が正の（値が決められている）枝のポテンシャルu_i, v_j**を、輸送コスト**c_{ij}**を用いて、以下のように求める。**

$c_{ij} = u_i + v_j$　　　**自由度を1つ残してポテンシャルが決まる。**

値が決められていない枝の、変化率Δ_{ij}**とポテンシャル**u_i, v_j**は、以下の関係にある。**

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

例

$$\begin{aligned}\Delta_{14} &= c_{14} - c_{12} + c_{22} - c_{23} + c_{33} - c_{34} \\ &= c_{14} - (u_1 + v_2) + (u_2 + v_2) - (u_2 + v_3) + (u_3 + v_3) - (u_3 + v_4) \\ &= c_{14} - u_1 - v_4\end{aligned}$$

この関係を用いて飛び石法と同様に解を改善する。

Step 1

	会社1	**会社2**	**会社3**	**会社4**	**生産**	u
工場1	(7) 12	(3) 3-0-(-1) =4	(2) 6	(10) 10-0-0 =10	18	0
工場2	(9) 9-4-7= -2	(3) 20	(6) 2	(8) 8-4-0 =4	22	4
工場3	(8) 8-6-7 =[-5]	(7) 7-6-(-1) =2	(8) 8	(6) 18	26	6
需要	12	20	16	18	66	
v	7	-1	2	0		

総輸送費=84+12+60+12+64+108 (=364-24) =340

Step 2

	会社 1	会社 2	会社 3	会社 4	生産	u
工場 1	(7) 4	(3) 3-0-(-1) =4	(2) 14	(10) 10-0-5 =5	18	0
工場 2	(9) 9-4-7 =[-2]	(3) 20	(6) 2	(8) 8-4-5 =-1	22	4
工場 3	(8) 8	(7) 7-1-(-1) =7	(8) 8-1-2 =5	(6) 18	26	1
需要	12	20	16	18	66	
v	7	-1	2	5		

総輸送費=28+28+60+12+64+108 (=340-40) =300

Step 3

	会社 1	会社 2	会社 3	会社 4	生産	u
工場 1	(7) 2	(3) 3-0-1 =2	(2) 16	(10) 10-0-5 =5	18	0
工場 2	(9) 2	(3) 20	(6) 6-2-2 =2	(8) 1	22	2
工場 3	(8) 8	(7) 7-1-1 =5	(8) 8-1-2 =5	(6) 18	26	1
需要	12	20	16	18	66	
v	7	1	2	5		

総輸送費=14+32+18+60+64+108 (=300-4) =296

5. ポテンシャル法と双対問題

主問題

工場 i から会社 j への単位製品当りの輸送コストを c_{ij}、

工場 i の生産高を a_i、会社 j の需要を b_j とすると。

目的関数 $z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ 最小化

制約条件 $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j$, $x_{ij} \geq 0$

双対問題

目的関数　　　　$z' = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_i v_i$　最大化

制約条件　　　　$u_i + v_j \le c_{ij}$

ここで、２つの問題の目的関数値を比較する。

$$z - z' = z - \sum_{i=1}^{m} a_i u_j - \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

$$= z - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} u_i - x_{ij} v_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} (c_{ij} - u_i - v_j)$$

ここで、$x_{ij} > 0$ のときに、$c_{ij} - u_i - v_j = 0$ となるように、u_i, v_j を求めると、$z - z' = 0$ となる。

この場合、一見 u_i, v_j は最適解となるように思われるが、注意が必要である。$x_{ij} = 0$ のとき $c_{ij} - u_i - v_j < 0$ の要素があると、これは双対問題の制約式を満たさないので、u_i, v_j は双対問題の解ではない。

ポテンシャル法による過渡的な解はまさにこの状況を表しており、すべての i, j に対して $c_{ij} - u_i - v_j \ge 0$ を満たすように改善されれば、それが最適解となる。

問　以下の 2×2 輸送問題の双対問題を求め、主問題と双対問題の目的関数値の差をそれぞれの変数を使って表せ。

	B1	B2	total	potential
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	a_1	u_1
A2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	a_1	u_1
total	b_1	b_1		
potential	v_1	v_1		

解答

主問題

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22}$$

$$x_{11} + x_{12} = a_1 \qquad x_{11} + x_{21} = b_1$$

$$x_{21} + x_{22} = a_2 \qquad x_{12} + x_{22} = b_2 \qquad x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \ge 0$$

双対問題

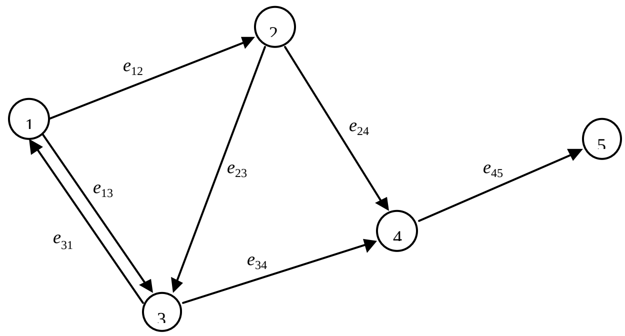
$$z' = a_1 u_1 + a_2 u_2 + b_1 v_1 + b_2 v_2$$

$$u_1 + v_1 \le c_{11} \qquad u_2 + v_1 \le c_{21}$$
$$u_2 + v_1 \le c_{21} \qquad u_2 + v_2 \le c_{22}$$

２つの問題の目的関数値を比較する。

$$\begin{aligned} z - z' &= z - (a_1 u_1 + a_2 u_2 + b_1 v_1 + b_2 v_2) \\ &= z - (x_{11} + x_{12}) u_1 + (x_{21} + x_{22}) u_2 \\ &\quad - (x_{11} + x_{21}) v_1 - (x_{12} + x_{22}) v_2 \\ &= x_{11}(c_{11} - u_1 - v_1) + x_{12}(c_{12} - u_1 - v_2) \\ &\quad + x_{21}(c_{21} - u_2 - v_1) + x_{22}(c_{22} - u_2 - v_2) \end{aligned}$$

3.2 グラフとネットワーク



有向グラフの例

頂点(Vertex)**集合** V $\quad V = \{1, 2, \cdots, 5\}$

枝(edge)**集合** E $\quad E = \{e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{24}, e_{31}, e_{34}, e_{45}\}$

グラフ G $\quad G = (V, E)$

枝に方向性のあるグラフ：有向グラフ(directed graph)

枝に方向性のないグラフ：無向グラフ(undirected graph)

ネットワーク N $\quad N = (V, E, d, w)$

$d : V \to R$ **各頂点に割り付けられた値**

$w : E \to R$ **各枝に割り付けられた値**

ルート　：　枝の系列 $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \cdots, (i_{k-1}, i_k)$ **を点** i_1 **と点** i_k **を結ぶルートをいう。**

サイクル：　始点と終点の一致したルート

パス　　：　方向を適当に付け換えることによってルートとなる枝の系列

ループ　：　始点と終点の一致したパス

連結ネットワーク：　任意の２点を結ぶパスが存在するネットワーク

木　　　：　連結でループを含まないネットワーク

3.3 最短路問題

3.4 割当問題 (Assignment Problem)

例

n **人の社員と** n **種類の職がある。社員** i **を職** j **につけた場合、会社に** c_{ij} **の利益をもたらすことが分かっている。総利益を最大にする組合せを求めよ。**

目的関数

$$z = (c_{11}x_{11} + \cdots + c_{1n}x_{1n}) + \cdots + (c_{n1}x_{n1} + \cdots + c_{nn}x_{nn}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

制約条件

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{nj} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

$$x_{ij} = \{0, 1\} \qquad (i, j = 1,2,\cdots,n)$$

例　上記の問題で、コスト行列 $\mathbf{C} = (c_{ij})$ **が以下で与えられるとき、最適解を求めよ。**

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 8 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

この問題はすべての場合を尽くそうと思えば、5！回の計算が必要である.

解法

１）行列Ｃの各行の最大値をその行の各値より引く。

$$
\mathbf{C}^{(1)}=\begin{pmatrix}-4 & -2 & -1 & 0 & -3\\ -3 & -1 & -4 & -4 & 0\\ -7 & -6 & -3 & 0 & -3\\ -4 & -3 & -2 & 0 & -4\\ -3 & 0 & -4 & -2 & -1\end{pmatrix}
$$

2）行列 C の各列の最大値をその行の各値より引く。

$$
\mathbf{C}^{(2)}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0 & 0 & -3\\ 0 & -1 & -3 & -4 & 0\\ -4 & -6 & -2 & 0 & -3\\ -1 & -3 & -1 & 0 & -4\\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1\end{pmatrix}
$$

$p_i=\max\{c_{ij}\mid j=1,2,\cdots,5\}$，$q_j=\max\{c_{ij}\mid i=1,2,\cdots,5\}$　**として、**

$$
\begin{aligned}
z' &= \sum_{i=1}^{5}\sum_{i=1}^{5}(c_{ij}-p_i-q_j)x_{ij}\\
&= \sum_{i=1}^{5}\sum_{i=1}^{5}c_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{5}p_i-\sum_{j=1}^{5}q_j\\
&= z-\mathrm{constant}
\end{aligned}
$$

以上より、 z **の最適化は** z' **の最適化と等しい。**

3）各行各列より 0 **を一つだけ選べるか。**

YES **なら、選んだ** 0 **の部分に** 1 **を入れたものが最適解**

NO **なら、次へ**

4）すべての 0 **を通る最小本数の線を引き、線上の数字はそのまま、それ以外の数字はそのうちの最小のものを引き、交差した数字に最小のものを加えたのち、3）へ戻る。**

$$
\mathbf{C}^{(2)}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0 & 0 & -3\\ 0 & -1 & -3 & -4 & 0\\ -4 & -6 & -2 & 0 & -3\\ -1 & -3 & -1 & 0 & -4\\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1\end{pmatrix}
\quad
\mathbf{C}^{(3)}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & -1 & -4 & -5 & 0\\ -3 & -5 & -2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & -1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & -4 & -3 & -1\end{pmatrix}
$$

注）1,3,4 **行から**-1 **を引き、**3,4 **列に**-1 **を足している。**

$$\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & [0] & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & [0] \\ -3 & -5 & -2 & [0] & -2 \\ [0] & -2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & [0] & -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$ **のように** 0 **を選ぶと、**

最適解は

$$\mathbf{x} = (x_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ **として、** $z = 4 + 6 + 8 + 2 + 5 = 25$

同様の方法は最小化問題にも適用できる。

問題

上記の問題で、コスト行列 $\mathbf{C} = (c_{ij})$ **が以下で与えられるとき、最適解を求めよ。**

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 & 2 & 3 \\ 9 & 0 & 10 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

解答

$$\mathbf{C}^{(1)} = \begin{pmatrix} -10 & -4 & 0 & -8 & -7 \\ -1 & -10 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & -8 & -4 & -7 \\ -6 & -5 & 0 & -9 & -2 \\ -1 & -2 & -5 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}^{(2)} = \begin{pmatrix} -10 & -2 & 0 & -8 & -5 \\ -1 & -8 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 & -5 \\ -6 & -3 & 0 & -9 & 0 \\ -1 & 0 & -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{(3)} = \begin{pmatrix} -9 & -1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & -7 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & -4 & -6 \\ -5 & -2 & 0 & -8 & 0 \\ -1 & 0 & -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

注）1,2,4 **行から**-1 **を引き、**3,5 **列に**-1 **を足している。**

$$\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} -9 & -1 & [0] & -7 & -5 \\ [0] & -7 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & [0] & -9 & -4 & -6 \\ -5 & -2 & 0 & -8 & [0] \\ -1 & 0 & -6 & [0] & -6 \end{pmatrix}$$

のように 0 **を選ぶと、**

最適解は

$$\mathbf{x} = (x_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

として、 $z = 10 + 9 + 6 + 7 + 7 = 39$

４章　整数計画法

4.1 整数計画問題 (integer programming problem) について

整数計画問題とは、適用範囲の広さと解法の困難さを併せ持つ、組合せ最適化問題 (combinatorial optimization problem) の１つで、線形計画問題の変数が整数の範囲に限定されている問題である。

$$z={}^t\mathbf{c}\mathbf{x} \quad \text{最大化}$$
$$\mathbf{A}_1\mathbf{x} \le \mathbf{b}_1$$
$$\mathbf{A}_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$$
$$\mathbf{A}_3\mathbf{x} \ge \mathbf{b}_3$$
$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}\text{：整数}$$

代表的例（ナップザック問題，巡回セールスマン問題）を用いて解法の一端を示す。

4.2 ナップサック問題 (knapsack problem)

1. ナップサック問題とは

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n \quad \text{最大化}$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \le b$$
$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in \{0, 1\} \qquad \text{変数は 0 または 1 の値をとる}$$

特徴

制約式が１つ（複数の場合、多次元ナップサック問題という）

制約式と目的変数の係数がすべて正

大きさの決まったナップサックに、荷物を詰め込む状況に似ているので、この名前が付いた。

2. 例と解法

４種類の製品の中から、何種類か生産するが、それぞれの製品の機械占有時間と利益は以下で与えられる。時間が８時間あるとして、どの製品を生産すればよいか。ただし、製品は同時に２つ以上生産できないものとする。

	製品１	製品２	製品３	製品４
利益（万円）	１１	7	１３	5
生産時間(時間)	3	2	4	3

解

問題は以下のように表される。

$$z = 11x_1 + 7x_2 + 13x_3 + 5x_4 \quad \text{最大化}$$

$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 8$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$

１）目的関数の係数c_i**と制約式の係数**a_i**を用いて、**c_i / a_i**を計算し、これが大きい順に変数のラベルを付け直す（ここではすでにこの順番になっている）。**

２）上の整数計画問題の代わりに、以下の線形計画問題を考える。

$\bar{z} = 11x_1 + 7x_2 + 13x_3 + 5x_4$ **最大化**

$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 8$

$0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 \le 1$

答　このような特殊な問題は、簡単に解けることが分かっている。

$x_1 = x_2 = 1, x_3 = \dfrac{8-3-2}{4} = \dfrac{3}{4}, x_4 = 0$　　（$x_1 = x_2 = 1$**を記憶する）**

$\bar{z} = 11 + 7 + \dfrac{13 \times 3}{4} = 27\dfrac{3}{4}$　→　$z_{\max} = 27\dfrac{3}{4}$

整数制約を付けた場合、$z_{\max}$**が上限となる。**

３）この解を小数点以下切り捨てて整数化し、最適解の下限値$z_{\min}$**を求める。**

$x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = 0$

$z = 11 + 7 = 18$　→　$z_{\min} = 18$　**（これを使う）**

４）分岐限定法により、問題を解く

$\underline{x_1 = 1}$（$x_2 = 1$）　**調査済み**

$\underline{x_2 = 1}$　→　**調査済み**

$\underline{x_3 = 1}$　→　**不可能（これ以上調査不要）**

$\underline{x_3 = 0}$

$\bar{z} = 5x_4 + 18$，$3x_4 \le 3$，$0 \le x_4 \le 1$

解　$x_4 = 1$，$\bar{z} = 23 > z_{\min}$　→　$z_{\min} = 23$

整数解の場合この条件での最適解（これ以上調査不要）

$\underline{x_2 = 0}$

$\bar{z} = 13x_3 + 5x_4 + 11$，$4x_3 + 3x_4 \le 5$，$0 \le x_3, x_4 \le 1$

解　$x_3 = 1, x_4 = \dfrac{1}{3}$，$\bar{z} = 13 + \dfrac{5}{3} + 11 = 25\dfrac{2}{3}$

整数化

$x_3 = 1, x_4 = 0$，$z = 13 + 11 = 24 > z_{\min}$　→　$z_{\min} = 24$

$\underline{x_3 = 1}$ → **調査済み**

$\underline{x_4 = 1}$ →**不可能（これ以上調査不要）**

$\underline{x_4 = 0}$ →**最後なので決まっている。**

$\underline{x_3 = 0}$

$\bar{z} = 5x_4 + 11$，$3x_4 \le 5$，$0 \le x_4 \le 1$

解 $x_4 = 1$，$\bar{z} = 16 < z_{\min}$ **これ以上調査不要**

$\underline{x_1 = 0}$

$\bar{z} = 7x_2 + 13x_3 + 5x_4$，$2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 8$，$0 \le x_2, x_3, x_4 \le 1$

解 $x_2 = x_3 = 1, x_4 = \dfrac{2}{3}$，$\bar{z} = 7 + 13 + \dfrac{10}{3} = 23\dfrac{1}{3} < z_{\min}$

これ以上調査不要

最適解 $x_1 = x_3 = 1, x_2 + x_4 = 0$，$z_{\max} = 24$

4.3 巡回セールスマン問題

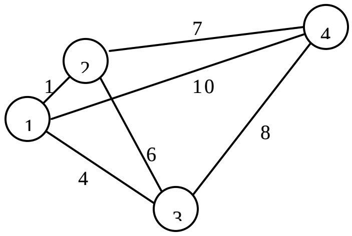
1. 巡回セールスマン問題のお話

例

セールスマンがある５地点を巡回しようとしている。それぞれの地点間の距離は以下のように与えられている。

	地点１	**地点２**	**地点３**	**地点４**
地点１		1	4	10
地点２	1		6	7
地点３	4	6		8
地点４	10	7	8	

地点１を出発点としてどのような順路を取れば最短距離であろうか。（但し、各地点は 1 回だけ通るものとする。）



解答

これは、地点間の距離を枝に割り付けられた値と考える、有向ネットワークである。

目的関数（最小化）

$$z = \sum_{i \neq j} c_{ij} x_{ij}$$

制約式

$$\sum_{j \neq i} x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\sum_{i \neq j} x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i \neq j)$$

この問題を割当問題として解く。

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \infty & 1 & 4 & 10 \\ 1 & \infty & 6 & 7 \\ 4 & 6 & \infty & 8 \\ 10 & 7 & 8 & \infty \end{pmatrix}$$

１）各行の最小値を各行の値から引く

２）各列の最小値を各列の値から引く

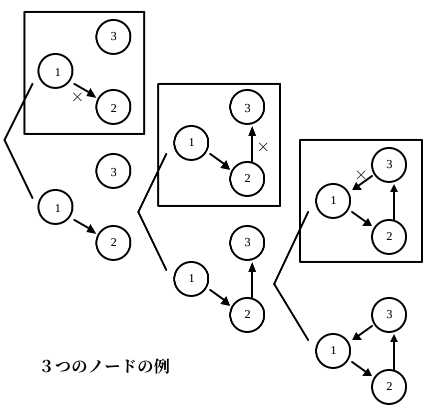
$$\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 2 & 5 \\ 0 & \infty & 4 & 2 \\ 0 & 2 & \infty & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

３）各行各列より 0 を一つだけ選べるか？　　$\rightarrow$　Yes

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これは連結ではない。

４）この部分巡回路のうち枝数が最小のものを選び、そのうちの１つの枝を通行不能または必ず通行にして再度割当問題を適用する。さらに必ず通行の場合は他の枝を通行不能または必ず通行にする。



３つのノードの例

①−×→②　の場合

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\infty & \infty & 4 & 10\\ 1 & \infty & 6 & 7\\ 4 & 6 & \infty & 8\\ 10 & 7 & 8 & \infty\end{pmatrix}\qquad ① \xrightarrow[\times]{} ②$$

$$\overline{\mathbf{C}}=\begin{pmatrix}\infty & \infty & 0 & 2\\ 0 & \infty & 5 & 2\\ 0 & 2 & \infty & 0\\ 3 & 0 & 1 & \infty\end{pmatrix}\qquad \mathbf{X}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ **連結**

$z=4+1+8+7=20$　　　$z_{\min}=20$

①→②，②−×→①　の場合

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\infty & 0 & 4 & 10\\ \infty & \infty & 6 & 7\\ 4 & 6 & \infty & 8\\ 10 & 7 & 8 & \infty\end{pmatrix}\qquad ① \overset{\times}{\underset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} ②$$

$$\overline{\mathbf{C}}=\begin{pmatrix}\infty & 0 & 4 & 9\\ \infty & \infty & 0 & 0\\ 0 & 2 & \infty & 3\\ 3 & 0 & 1 & \infty\end{pmatrix}\qquad \overline{\mathbf{C}}'=\begin{pmatrix}\infty & 0 & 3 & 8\\ \infty & \infty & 0 & 0\\ 0 & 3 & \infty & 3\\ 2 & 0 & 0 & \infty\end{pmatrix}\qquad \mathbf{X}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$z=1+7+4+8=20$　　　$z_{\min}=20$　**逆回り**

この場合分岐限定法の分岐だけで問題が解けてしまう。

演習

以下の距離行列の巡回セールスマン問題を解け。

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\infty & 2 & 2 & 5 & 4\\ 4 & \infty & 2 & 7 & 5\\ 2 & 2 & \infty & 6 & 6\\ 4 & 5 & 3 & \infty & 4\\ 3 & 5 & 6 & 3 & \infty\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & \infty & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \infty & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & \infty & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & \infty \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \infty & \dot{0} & 0 & 3 & 1 \\ 2 & \infty & \dot{0} & 5 & 2 \\ \dot{0} & 0 & \infty & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & \infty & \dot{0} \\ 0 & 2 & 3 & \dot{0} & \infty \end{pmatrix}$$

①→②→③→①，④→⑤→④　　$z = 2+2+2+4+3 = 13$

これは、巡回セールスマン問題の解ではない。

分岐限定法

④−×→⑤　**の場合**

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \infty & 2 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & \infty & 2 & 7 & 5 \\ 2 & 2 & \infty & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & \infty & \infty \\ 3 & 5 & 6 & 3 & \infty \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & \infty & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \infty & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & \infty & \infty \\ 0 & 2 & 3 & 0 & \infty \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & \infty & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \infty & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \infty & \infty \\ 0 & 2 & 3 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \infty & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & \infty & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \infty & \infty \\ 0 & 2 & 4 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

①→②→⑤→④→③→①　　$z = 15$　**解である。**

①→⑤→④→②→③→①

①→⑤→④→①，②→③→②

④→⑤，⑤−×→④　**の場合**

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \infty & 2 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & \infty & 2 & 7 & 5 \\ 2 & 2 & \infty & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & \infty & \dot{0} \\ 3 & 5 & 6 & \infty & \infty \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & \infty & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \infty & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & \infty & \dot{0} \\ 0 & 2 & 3 & \infty & \infty \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & \dot{0} & 2 \\ 2 & \infty & \dot{0} & 2 & 3 \\ 0 & \dot{0} & \infty & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & \infty & \dot{0} \\ \dot{0} & 2 & 3 & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

①→④→⑤→①，②→③→②　　$z = 16$

これ以上分岐する必要があるか？

z は 16 **より小さくなることはないので、これ以上分岐する必要はない。**

５章　動的計画法

動的計画法（D.P.: Dynamic Programming）

5.1 動的計画法による配分問題

例

2 **単位の資金を** 3 **つの計画に配分する。計画**i**に**x_i**単位の資金を投資したときに得る利益は以下の表によって与えられる。どのような投資計画が最大利益を上げるか。**

投資額 (100 **万円**)	0	1	2
計画 1	0	5	7
計画 2	0	4	8
計画 3	0	5	8

目的関数　$z = r_1(x_1) + r_2(x_2) + r_3(x_3) + r_4(x_4)$　**最大化**

制約条件　$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$，　$x_i \geq 0$ **整数**

解答

$f_n(d)$：　**資金** d **の投資計画のプロジェクト** n **まで考慮した最大利益**

$n = 1$

$$f_1(0) = r(0) = 0 \qquad x_1 = 0$$
$$f_1(1) = r(1) = 5 \qquad x_1 = 1$$
$$f_1(2) = r(2) = 7 \qquad x_1 = 2$$

$n = 2$

$$f_2(0) = f_1(0) + r_2(0) = 0 \qquad x_2 = 0$$
$$\begin{aligned} f_2(1) &= \max\{ f_1(1) + r_2(0),\ f_1(0) + r_2(1)\} \\ &= \max\{5+0,\ 0+4\} = 5 \end{aligned} \qquad x_2 = 0$$
$$\begin{aligned} f_2(2) &= \max\{ f_1(2) + r_2(0),\ f_1(1) + r_2(1),\ f_1(0) + r_2(2)\} \\ &= \max\{7+0,\ 5+4,\ 0+8\} = 9 \end{aligned} \qquad x_2 = 1$$

$n = 3$

$$\begin{aligned} f_3(2) &= \max\{ f_2(2) + r_3(0),\ f_2(1) + r_3(1),\ f_2(0) + r_3(2)\} \\ &= \max\{9+0,\ 5+5,\ 0+8\} = 10 \end{aligned} \qquad x_3 = 1$$

以上より、

$$f_3(2) = 10,\ x_3 = 1$$
$$f_2(2-1) = f_2(1) = 5,\ x_2 = 0$$
$$f_1(1-0) = f_1(1) = 1,\ x_1 = 1$$

計算機では再帰的方法が適している。

段階数n**、制約条件右辺**d **として、**(n,d) **問題の最大総利益を** $f_n(d)$ **とする。**

再帰方程式

$(1,d)$**問題**

$$f_1(d)=r_1(x_1)=r_1(d)$$

(n,d) **問題**

$$\begin{aligned} f_n(d) &= \max_{x_1+x_2+\cdots+x_n=d}[r_1(x_1)+\cdots+r_{n-1}(x_{n-1})+r_n(x_n)] \\ &= \max_{0\le x_n\le d}[f_{n-1}(d-x_n)+r_n(x_n)] \end{aligned}$$

$d-x_n$ **の投資額で最大利益の配分に計画**n**からの利益を加えたものを最大にする。**

決定の全系列に渡って最適化を行うためには、初期の状態と最初の決定がどんなものでも、残りの決定は最初の決定から生じた最適なものでなければならない。

最適性の原理

最適性の原理を用いた解法を動的計画法という。

演習１

合計して７の４個の正整数x_1,x_2,x_3,x_4**について、それらの積を最大にするには、どのように分ければよいか。ただし、** $x_1\le x_2\le x_3\le x_4$

解答

目的関数　$z=x_1x_2x_3x_4$

制約条件　$x_1+x_2+x_3+x_4=7$

$f_n(d)$ **：** $x_1\cdots x_d$ **の最大値（**$x_1+\cdots+x_n=d$ **）**

制約条件を利用して、$1\le x_i\le 4$**とする。**

$n=1$**のとき**

$f_1(1)=1$　　$x_1=1$

$f_1(2)=2$　　$x_1=2$

$f_1(3)=3$　　$x_1=3$

$f_1(4)=4$　　$x_1=4$

$n=2$

$f_2(2)=1\cdot f_1(1)=1$　　$x_2=1$

$$f_2(3) = \max\{1\cdot f_1(2),\ 2\cdot f_1(1)\}$$
$$= \max\{2, 2\} = 2 \qquad x_2 = 2$$
$$f_2(4) = \max\{1\cdot f_1(3),\ 2\cdot f_1(2),\ 3\cdot f_1(1)\}$$
$$= \max\{3, 4, 3\} = 4 \qquad x_2 = 2$$
$$f_2(5) = \max\{1\cdot f_1(4),\ 2\cdot f_1(3),\ 3\cdot f_1(2),\ 4\cdot f_1(1)\}$$
$$= \max\{4, 6, 6, 4\} = 6 \qquad x_2 = 3$$

$n = 3$

$$f_3(3) = 1\cdot f_2(2) = 1 \qquad x_3 = 1$$
$$f_3(4) = \max\{1\cdot f_2(3),\ 2\cdot f_2(2)\}$$
$$= \max\{2, 2\} = 2 \qquad x_3 = 2$$
$$f_3(5) = \max\{1\cdot f_2(4),\ 2\cdot f_2(3),\ 3\cdot f_2(2)\}$$
$$= \max\{4, 4, 3\} = 4 \qquad x_3 = 2$$
$$f_3(6) = \max\{1\cdot f_2(5),\ 2\cdot f_2(4),\ 3\cdot f_2(3),\ 4\cdot f_2(2)\}$$
$$= \max\{6, 8, 6, 4\} = 8 \qquad x_3 = 2$$

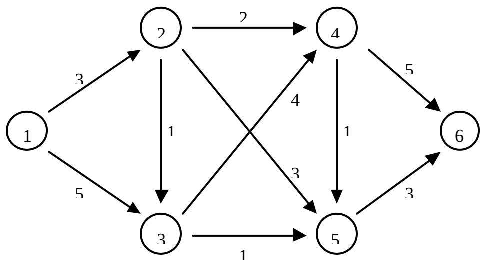
$n = 4$

$$f_4(7) = \max\{1\cdot f_3(6),\ 2\cdot f_3(5),\ 3\cdot f_3(4),\ 4\cdot f_3(3)\}$$
$$= \max\{8, 8, 6, 4\} = 8 \qquad x_4 = 2$$

$x_4 = x_3 = x_2 = 2,\ x_1 = 1$のとき、$z = f_4(7) = 8$

問題２

以下の各枝に距離が与えられた有向ネットワークについて、端点１から端点６への最短経路とそのときの距離を動的計画法を用いて求めよ。



解答

$$f_1 = 0$$
$$f_2 = f_1 + 3 = 3$$
$$f_3 = \min\{f_1 + 5,\ f_2 + 1\} = \min\{5, 4\} = 4$$

$$f_4 = \min\{\, f_2 + 2,\ f_3 + 4\} = \min\{\,5, 8\} = 5$$
$$f_5 = \min\{\, f_2 + 3,\ f_3 + 1,\ f_4 + 1\} = \min\{\,6, 5, 6\} = 5$$
$$f_6 = \min\{\, f_4 + 5,\ f_5 + 3\} = \min\{\,10, 8\} = 8$$

これより、最短経路は、①→②→③→⑤→⑥、距離は 8 **である。**

この問題は以下のように定式化される。

$$f_1 = 0$$

$$f_j = \min_i \{\, f_i + r_{ij}\}$$

6章　非線形計画法

現在考察中

演習問題

演習２－１

以下の制約条件が与えられたとき、目的関数を最大とする最適解をシンプレックス法を用いて求めよ。

目的関数

$$z = x_1 + x_2$$

制約条件

$$2x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

解答

Step 0

$$z - x_1 - x_2 = 0$$
$$[2x_1] + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

Step 1

$$z - 1/2\,x_2 + 1/2\,x_3 = 3$$
$$x_1 + 1/2\,x_2 + 1/2\,x_3 = 3$$
$$[3/2\,x_2] - 1/2\,x_3 + x_4 = 5$$

Step 2

$$z + 1/3\,x_3 + 1/3\,x_4 = 14/3$$
$$x_1 + 2/3\,x_3 - 1/3\,x_4 = 4/3$$
$$x_2 - 1/3\,x_3 + 2/3\,x_4 = 10/3$$

最適解　$x_1 = 4/3,\ x_2 = 10/3$　**のとき**　$z = 14/3$

シンプレックス表

Step	基底変数	x1	x2	x3	x4	右辺
0	z	-1	-1	0	0	0
	x3	[2]	1	1	0	6
	x4	1	2	0	1	8
1	z	0	-1/2	1/2	0	3
	x1	1	1/2	1/2	0	3
	x4	0	[3/2]	-1/2	1	5
2	z	0	0	1/3	1/3	14/3
	x1	1	0	2/3	-1/3	4/3
	x2	0	1	-1/3	2/3	10/3

演習２－２

以下の制約条件が与えられたとき、目的関数を最大とする最適解をシンプレックス法を用いて求めよ。

目的関数

$z = 2x_1 + 3x_2$ **最大化** $z - 2x_1 - 3x_2 = 0$

制約条件

$$3x_1 + x_2 \le 60 \qquad\qquad 3x_1 + x_2 + x_3 = 60$$
$$x_1 + 2x_2 \le 40 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2x_2 + x_4 = 40$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0 \qquad\qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0$$

解答

シンプレックス表

Step	**基底変数**	x1	x2	x3	x4	**右辺**
0	z	-2	-3	0	0	0
	x3	3	1	1	0	60
	x4	1	[2]	0	1	40
1	z	-1/2	0	0	3/2	60
	x3	[5/2]	0	1	-1/2	40
	x2	1/2	1	0	1/2	20
2	z	0	0	1/5	7/5	68
	x1	1	0	2/5	-1/5	16
	x2	0	1	-1/5	3/5	12

演習２－３

以下の制約条件が与えられたとき、目的関数を最大とする最適解をシンプレックス法を用いて求めよ。

目的関数

$z = 2x_1 + 4x_2$ **最大化** $\qquad z - 2x_1 - 4x_2 = 0$

制約条件

$$
\begin{aligned}
& x_1 + 3x_2 \leq 60 & & x_1 + 3x_2 + x_3 = 60 \\
& 3x_1 + 5x_2 \leq 100 & \Rightarrow \quad & 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 100 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 40 & & 2x_1 + x_2 + x_5 = 40 \\
& x_1, x_2 \geq 0 & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

解答

シンプレックス表

Step	基底変数	x1	x2	x3	x4	x5	右辺
0	z	-2	-4	0	0	0	0
	x3	1	[3]	1	0	0	60
	x4	3	5	0	1	0	100
	x5	2	1	0	0	1	40
1	z	-2/3	0	4/3	0	0	80
	x2	1/3	1	1/3	0	0	20
	x4	[4/3]	0	-5/3	1	0	0
	x5	5/3	0	-1/3	0	1	20
2	z	0	0	1/2	1/2	0	80
	x2	0	1	3/4	-1/4	0	20
	x1	1	0	-5/4	3/4	0	0
	x5	0	0	7/4	-5/4	1	20

演習２－４

　ある工場で２種類の原料 M_1, M_2 から、３つの製品 P_1，P_2，P_3 を作る。原料の供給量には制約があり、それぞれ１日当り 300kg，200kg である。各製品の利益は、製品１単位当りそれぞれ、5 千円，8 千円，3 千円とする。

　各製品を作るのに以下の量の原料が必要であるとして、最大の利益を与える製品の生産量はいくらか。

	P_1	P_2	P_3
M_1 (kg)	5	7	1
M_2 (kg)	4	3	4

解答

$$\begin{aligned} &z = 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 \\ &5x_1 + 7x_2 + x_3 \le 300 \\ &4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 200 \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &z - 5x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 0 \\ &5x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 300 \\ &4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 200 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

シンプレックス表

回数	**基底変数**	x1	x2	x3	x4	x5	**右辺**
0	z	-5	-8	-3	0	0	0
	x4	5	[7]	1	1	0	300
	x5	4	3	4	0	1	200
1	z	5/7	0	-13/7	8/7	0	2400/7
	x2	5/7	1	1/7	1/7	0	300/7
	x5	13/7	0	[25/7]	-3/7	1	500/7
2	z	42/25	0	0	23/25	13/25	380
	x2	16/25	1	0	4/25	-1/25	40
	x3	13/25	0	1	-3/25	7/25	20

演習２－５

目的関数

$z = 2x_1 + 3x_2$ **最大化**

制約条件

$x_1 + x_2 = 5$

$x_1, x_2 \geq 0$

解答

シンプレックス表

第１段階

Step	**基底変数**	x1	x2	x3	**右辺**
0	-w	-1	-1	0	-5
	z	-2	-3	0	0
	x3	[1]	1	1	5
1	-w	0	0	1	0
	z	0	-1	2	10
	x1	1	1	1	5

第２段階

Step	**基底変数**	x1	x2	**右辺**
1	z	0	-1	10
	x1	1	[1]	5
2	z	1	0	15
	x2	1	1	5

最適解　$x_1 = 0, x_2 = 5$　**のとき**　$z = 15$

演習２－６

目的関数

$$z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$ **最大化**

制約条件

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 60$$

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 100$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

解答

シンプレックス表

第１段階

Step	基底変数	x1	x2	x3	x4	x5	右辺
0	-w	-4	-7	-5	0	0	-160
	z	-5	-6	-3	0	0	0
	a1	1	[3]	2	1	0	60
	a2	3	4	3	0	1	100
1	-w	-5/3	0	-1/3	7/3	0	-20
	z	-3	0	1	2	0	120
	x2	1/3	1	2/3	1/3	0	20
	a2	[5/3]	0	1/3	-4/3	1	20
2	-w	0	0	0	1	1	0
	z	0	0	8/5	-2/5	9/5	156
	x2	0	1	3/5	3/5	-1/5	16
	x1	1	0	1/5	-4/5	3/5	12

第２段階

Step	基底変数	x1	x2	x3	右辺
2	z	0	0	8/5	156
	x2	0	1	3/5	16
	x1	1	0	1/5	12

最適解　$x_1 = 12, x_2 = 16, x_3 = 0$ **のとき** $z = 156$

演習３－１　コストが最小の解を以下の初期解から求めよ。

	B1	B2	B3	total
A1	8 5	5	4	5
A2	6 1	4 10	5 4	15
total	6	10	4	20

解

Step 0

	B1	B2	B3	total
A1	8 5	5 -1	4 [-3]	5
A2	6 1	4 10	5 4	15
total	6	10	4	20

cost 40+6+40+20=106

(1,2) 5-8+6-4=-1　(1,3) 4-8+6-5=[-3]

(1,3) **を** 4 **増やせる。**

Step 1

	B1	B2	B3	total
A1	8 1	5 -1	4 4	5
A2	6 5	4 10	5 3	15
total	6	10	4	20

cost 8+16+30+40 (=106-12) =94

(1,2) 5-8+6-4=-1　(2,3) 5-4+8-6=3

(1,2) **を** 1 **増やせる**

Step 2

	B1	B2	B3	total
A1	8 1	5 1	4 4	5
A2	6 6	4 9	5 2	15
total	6	10	4	20

cost 5+16+36+36 (=94-1) =93

(1,1) 8-6+4-5=1　(2,3) 5-4+5-4=2

どの枝もこれ以上増やせない。