６章 不定積分

6.1 不定積分とは

微分： $y = x^4 \to \dfrac{dy}{dx} = 4x^3$

（不定）積分： $y = x^3 \to \int x^3 dx = \dfrac{1}{4}x^4 + c$　　　c ：積分定数

微分の逆が不定積分である。

6.2 算術関数の不定積分

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int \frac{1}{x} dx = \log_e |x| + c$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

6.3 関数の定数倍と和の不定積分

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

例

$$\int 3\sin x dx = -3\cos x + c$$

$$\int (x^2 + \cos x)dx = \frac{1}{3}x^3 + \sin x + c$$

問

1) $\int \sqrt{x} dx$　　2) $\int (x^2 + 2x + 3)\,dx$

3) $\int (x + \dfrac{1}{x})\,dx$　　4) $\int \left(2x^{-1/3} + x^{-2/3}\right)dx$

5) $\int (\sin x + \cos x)\,dx$

解答

1) $\dfrac{2}{3}x^{3/2} + c$　　2) $\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + c$　　3) $\dfrac{1}{2}x^2 + \log_e |x| + c$

4) $3x^{2/3}+3x^{1/3}+c$ 5) $-\cos x+\sin x+c$

6.4 微分の掛け算を利用した積分

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x))=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$f(x)g(x)=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx$ を利用する。

公式 $\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$

部分的に積分することから、部分積分とも呼ばれる。

例

$$\int xe^x dx = xe^x-\int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x + c$$

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int 1\cdot \sin x dx$$
$$= x\sin x+\cos x + c$$

$$\int \log_e x dx = \int 1\cdot \log_e x dx$$
$$= x\log_e x - \int x\cdot 1/x dx$$
$$= x\log_e x - x + c$$

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$
$$= e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x \sin x dx$$ の関係から、
$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+c$$

$$\int \sin^2 x dx = -\cos x \sin x + \int \cos^2 x dx$$
$$= -\cos x\sin x + \int (1-\sin^2 x)dx$$
$$= -\frac{1}{2}\cos x\sin x+\frac{1}{2}x+c$$

別解　半角の公式を利用してもよい。

問

1) $\int x\sin x dx$ 2) $\int x^n \log_e x dx$ 3) $\int x^2 e^x dx$ 4) $\int \sin^3 x dx$

5) $I_n=\int x^n e^x dx$ の漸化式（I_n と I_{n-1} との関係）を求めよ。

6) $I_n=\int \sin^n x dx$ の漸化式を求めよ。

解答

1) $\int x\sin xdx=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+c$

2)
$$\begin{aligned}\int x^n\log_e xdx&=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\log_e x-\frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\cdot 1/x\,dx\\&=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\log_e x-\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}+c\end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned}\int x^2e^xdx&=x^2e^x-\int 2xe^xdx\\&=x^2e^x-2xe^x+2\int e^xdx\\&=x^2e^x-2xe^x+2e^x+c\end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned}\int\sin^3 xdx&=-\cos x\sin^2 x+2\int\cos^2 x\sin xdx\\&=-\cos x\sin^2 x-\frac{2}{3}\cos^3 x+c\end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned}I_n&=\int x^ne^xdx\\&=x^ne^x-n\int x^{n-1}e^xdx=x^ne^x-nI_{n-1}\end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned}I_n&=\int\sin^n xdx=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\cos^2\sin^{n-2}xdx\\&=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}xdx\\&=-\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n}I_{n-1}\end{aligned}$$

6.5 変数変換を利用した積分

1. $\int f(g(x))dx=\int f(z)\dfrac{dx}{dz}dz$ **のとき**

変数変換： $dx=\dfrac{dx}{dz}dz$ **として計算する。**

例

1) $\int\sin 2xdx=\int\sin z\dfrac{dx}{dz}dz=\int\sin z\dfrac{1}{2}dz=\dfrac{1}{2}\int\sin zdz$

$z=2x$，$dx=\dfrac{1}{2}dz$

$=-\dfrac{1}{2}\cos z+c=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+c$

2) $\int e^{3x}dx = \int e^z \dfrac{dx}{dz}dz = \int e^z \dfrac{1}{3}dz = \dfrac{1}{3}\int e^z dz = \dfrac{1}{3}e^z + c = \dfrac{1}{3}e^{3x} + c$

$$z = 3x\text{，}\quad dx = \frac{1}{3}dz$$

$$= \frac{1}{3}e^z + c = \frac{1}{3}e^{3x} + c$$

3) $\int (3x+2)^4 dx = \int z^4 \dfrac{1}{3}dz = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{5}z^5 + c = \dfrac{1}{15}(3x+2)^5 + c$

4) $\int \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int \dfrac{z^2-1}{z}2zdz = 2\int (z^2-1)dz$

$$z = \sqrt{x+1}\text{，}\quad z^2 = x+1\text{，}\qquad x = z^2-1\text{，}\quad dx = 2zdz$$

$$= \frac{2}{3}z^3 - 2z + c = \frac{2}{3}(x+1)^{2/3} - 2(x+1)^{1/2} + c$$

問　以下の不定積分を行え。

1) $\int \cos(4x+5)dx$　　2) $\int \dfrac{1}{3x-1}dx$

3) $\int (2x+1)^{-4}dx$　　4) $\int \sqrt{3x+2}\,dx$

5) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

解答

1) $\dfrac{1}{4}\sin(4x+5) + c$　　2) $\dfrac{1}{3}\log_e|3x-1| + c$

3) $-\dfrac{1}{6}(2x+1)^{-3} + c$　　4) $\dfrac{2}{9}(3x+2)^{3/2} + c$

5) $\int e^{\sqrt{x}}dx = \int e^z 2zdz = 2\int ze^z dz = 2(ze^z - \int e^z dz)$

$$= 2(ze^z - e^z) + c = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + c$$

2. $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(z)\dfrac{dz}{dx}dx = \int f(z)dz \qquad z = g(x)$

変数変換：　$\dfrac{dz}{dx}dx = dz$　**として計算する。**

例

1) $\int xe^{x^2}dx = \dfrac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dz}{dx}e^z dx = \dfrac{1}{2}\int e^z dz = \dfrac{1}{2}e^z + c = \dfrac{1}{2}e^{x^2} + c$

2) $\int \cos x e^{\sin x}dx = \int e^z \dfrac{dz}{dx}dx = \int e^z dz = e^z + c = e^{\sin x} + c$

3) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\frac{dz}{dx}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}dz$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\log|z| + c = \frac{1}{2}\log|x^2+1| + c$

4) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{z}\frac{dz}{dx}dx = \int \frac{1}{z}dz = \log|z| + c = \log|f(x)| + c$

問　以下の不定積分を行え。

1) $\displaystyle\int x\sin(x^2)dx$　　2) $\displaystyle\int (2x+1)e^{x^2+x+1}dx$

3) $\displaystyle\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$　　4) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

5) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$

解答

1) $\displaystyle -\frac{1}{2}\cos(x^2) + c$　　2) $e^{x^2+x+1} + c$

3) $\displaystyle \frac{1}{3}\sin^3 x + c$　　4) $\log_e|\sin x| + c$

5) $x\tan x + \log_e|\cos x| + c$

6.6 有用な公式

1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$　**のとき、$x = a\sin q$ とおく**

$\displaystyle = \int dq = q + c = \sin^{-1}(x/a) + c$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)dx = \frac{1}{2a}\log_e\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

3) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int a^2\cos^2 q\, dq = a^2\int \frac{\cos 2q + 1}{2}dq$

$\displaystyle = \frac{a^2}{4}(\sin 2q + 2q) + c = \frac{a^2}{2}(\sin q\cos q + q) + c$

$\displaystyle = \frac{1}{2}[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}(x/a)] + c$

4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \int \frac{\dfrac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}dx = \log_e\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + c$

$x = a\tan q$ としても可能

5) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$ 　のとき、$x = a\tan q$ とおく

$$= \int \frac{\cos^2 q}{a^2} \frac{a}{\cos^2 q} dq = \frac{1}{a}\int dq = \frac{1}{a} q + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}(x/a) + c$$

6) $\displaystyle\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$ 　のとき、

$$= x\sqrt{a^2 + x^2} - \int x \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$$

$$= x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx - \int \sqrt{a^2 + x^2} dx$$

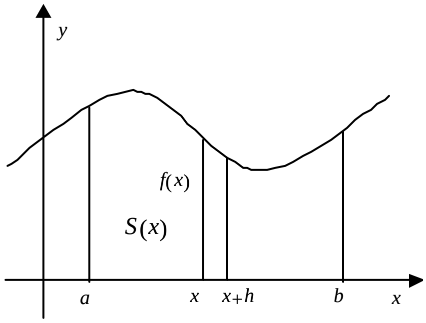
$$\frac{d}{dx}\log_e\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$ 　より、

$$= \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\log_e\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + c$$

$x = a\tan q$ としても可能

7章 定積分

7.1 定積分と面積



$$\frac{dS(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot h}{h} = f(x)$$

$$S(x) = \int f(x)dx = F(x)+c$$

$$S(a) = F(a)+c = 0 \qquad\qquad c = -F(a)$$

ゆえに、 $S(x) = F(x) - F(a)$

一方、 $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ **と表わすと、以下となる。**

$\int_a^b f(x)dx = S(b) = S$ **：面積**

7.2 基本的な定積分

例

$$\int_0^2 xdx = [\tfrac{1}{2}x^2]_0^2 = \frac{1}{2}(2^2-0) = 2$$

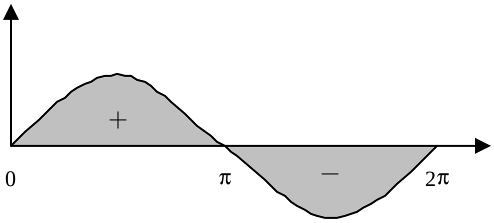
$$\int_0^1 x^2 dx = [\tfrac{1}{3}x^3]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = [e^x]_{-\infty}^0 = e^0 - e^{-\infty} = 1$$

$$\int_0^{\pi} \sin xdx = [-\cos x]_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$$

$$\int_0^{2\pi} \sin xdx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = -(1-1) = 0$$

注）関数の負の部分はマイナスとなる。



$$\int_0^4 (x+1)dx = [1/2\,x^2 + x]_0^4 = 8+4 = 12$$

$$\int_0^{\pi} (1+\sin x)dx = [x - \cos x]_0^{\pi} = \pi - (-1) + 1 = \pi + 2$$

$$\int_0^1 (e^x + e^{-x})dx = [e^x - e^{-x}]_0^1 = (e - e^{-1}) - (1-1) = e - e^{-1}$$

7.3 定積分記号の直感的解釈

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

図

以上より、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \ \to \ \int_a^b \ , \quad \Delta x \to dx$$ **とみなすことができる。**

計算機で積分の値を求めるときこれらの関係が利用される。

7.4 部分積分

$$\int_a^b \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx = \int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]dx$$

$$= \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

一方 **左辺**$= \left[f(x)g(x) \right]_a^b$

以上より

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

例

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

$$\int_0^{\pi} x\sin x dx = [-x\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -\pi\cos\pi + [\sin x]_0^{\pi} = \pi$$

$$\int_1^{e} \log_e x dx = \int_1^{e} 1\cdot\log_e x dx = [x\log_e x]_1^{e} - \int_1^{e} x\frac{1}{x}dx = e - [x]_1^{e} = 1$$

$$I = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx = [e^x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$$

$$= 0 - [e^x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$$

$$= (e^{\pi} + e^0) - I$$

$$I = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$$

問　部分積分を用いて以下の定積分を行え。

1) $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$　　2) $\int_0^1 (x+1)e^x dx = e$

3) $\int_0^{\pi/2} x\sin x dx$　　4) $\int_0^{2\pi} x\sin x dx$

5) $\int_{-\pi}^{0} x\cos x dx$　　6) $\int_1^{e} x\log_e x dx$

7) $\int_0^1 x^2 e^x dx$　　8) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$

解答

1) 1　　2) e　　3) 1　　4) -2π

5) 2　　6) $\frac{1}{4}(e^2+1)$　　7) $e-2$　　8) $\frac{\pi}{4}$

漸化式となる公式

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = [-x^n e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} nx^{n-1}e^{-x} dx = n\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x} dx$$

$$= nI_{n-1} = n\cdot(n-1)I_{n-2} = \cdots = n!I_0$$

$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = 1$　**より、**

$$I_n = n!I_0 = n!$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

$$I_n = \int_0^{p/2} \sin^n x dx = \int_0^{p/2} \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx$$

$$= [\sin^{n-1} x \cdot (-\cos x)]_0^{p/2} + \int_0^{p/2} (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \cdot \cos x dx$$

$$= (n-1) \int_0^{p/2} \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= (n-1) \int_0^{p/2} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{p/2} \sin^n x dx$$

$$= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

ゆえに、$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$

但し、$I_0 = \int_0^{p/2} 1 dx = \dfrac{p}{2}$，$I_1 = \int_0^{p} \sin x dx = 1$

これを用いて、

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} \qquad I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

例えば、

$$I_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} = \frac{3p}{16} \qquad I_5 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{8}{15}$$

また同様にして、以下も示される。

$$\int_0^{p/2} \cos^n x dx = \int_0^{p/2} \sin^n x dx = I_n$$

7.5 定積分の変数変換

$$\int_a^b f(g(x)) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) \frac{dx}{dz} dz$$

特に、$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) dz$

例

$\int_0^{p/2} \sin 2x dx$ 　について

不定積分を用いる方法

$$\int_0^{p/2} \sin 2x dx = [-\frac{1}{2} \cos 2x]_0^{p/2} = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

変数変換を用いる方法

$z = 2x$，$dz = \dfrac{dz}{dx} dx = 2dx$ 　であるが、

変数変換することにより、積分範囲も変わる。

$$x=0\to\pi/2,\quad z=0\to\pi$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin 2x dx=\int_0^{\pi}\sin z\frac{1}{2}dz=\frac{1}{2}[-\cos z]_0^{\pi}=\frac{1}{2}(1+1)=1$$

例

$\int_0^1(2x+1)^3 dx$ **について**

変数変換を用いる方法

$z=2x+1,\quad dz=2dx$ **であるが、**

変数変換することにより、積分範囲も変わる。

$x=0\to1,\quad z=1\to3$

$$\int_0^1(2x+1)^3 dx=\frac{1}{2}\int_1^3 z^3dz=\frac{1}{2}[\frac{1}{4}z^4]_1^3=\frac{1}{8}(3^4-1)=10$$

例

$$\int_1^2\frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{\sqrt{2x-1}}2dx=\frac{1}{2}\int_1^3 z^{-1/2}dz=\frac{2}{2}[z^{1/2}]_1^3=\sqrt{3}-1$$

$$\int_0^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 e^{x^2}2xdx=\frac{1}{2}\int_0^4 e^z dz=\frac{1}{2}[e^z]_0^4=\frac{1}{2}(e^4-1)$$

$$\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\int_1^3\frac{1}{z}dz=[\log_e|z|]_1^3=\log_e 3-\log_e 1=\log_e 3$$

一般に $\int_a^b\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int_{f(a)}^{f(b)}\frac{1}{z}dz=[\log_e|z|]_{f(a)}^{f(b)}=\log_e|f(b)/f(a)|$

よく知られた変数変換

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta}{\cos\theta}d\theta=\int_0^{\pi/2}d\theta=\frac{\pi}{2}$$

$x=\sin\theta \qquad dx=\frac{dx}{d\theta}d\theta=\cos\theta d\theta$

一般に、$\sqrt{a^2-x^2}$ **の場合は** $x=a\sin\theta$

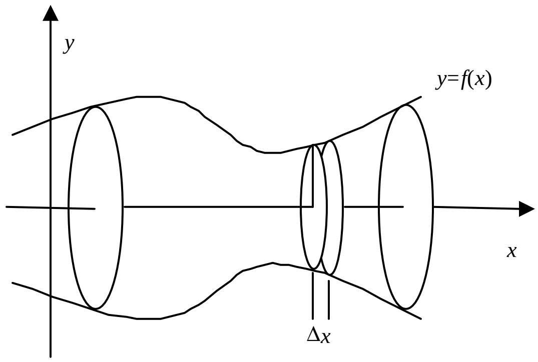
$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\pi/4}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

一般に、a^2+x^2 **の場合は** $x=a\tan\theta$

7.6 回転図形の体積・曲線の長さ

1. 回転図形の体積

定積分： $V=\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$， $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$



$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi y_i^2\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi f^2(x_i)\Delta x,\quad \Delta x=\frac{b-a}{n}$$

$$V=\int_a^b \pi y^2 dx=\int_a^b \pi f^2(x)dx$$

例　底半径 r 高さ h の三角錐の体積

$y=\dfrac{r}{h}x$　として、

$$V=\int_0^h \pi y^2 dx=\pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

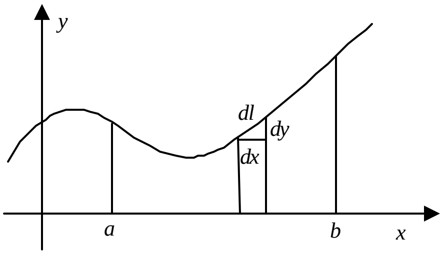
$=\dfrac{1}{3}\times$**底面積**$\times$**高さ**

例　球の体積

$x^2+y^2=r^2$　　$y^2=r^2-x^2$　として、

$$V=\int_{-r}^{r}\pi(r^2-x^2)dx=\pi[r^2x-\frac{1}{3}x^3]_{-r}^{r}=2\pi(r^3-\frac{1}{3}r^3)=\frac{4\pi}{3}r^3$$

2. 曲線の長さ



$dl^2 = dx^2 + dy^2$　より、

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

公式　$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$

例　円周の長さ

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$dl = \sqrt{1 + \frac{x}{r^2 - x^2}}\,dx = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx$$

$$L = 4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}dx = 4r\int_0^{\pi/2} \frac{1}{r\cos\theta} r\cos\theta\, d\theta = 4r\frac{\pi}{2} = 2\pi r$$

$$x = r\sin\theta,\quad dx = r\cos\theta\, d\theta$$

例　$y = \frac{1}{2}x^2$　の $0 \le x \le 1$ の長さ

$$dl = \sqrt{1 + x^2}\,dx$$

公式　$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\log_e\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + c$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}\log_e\left|x + \sqrt{1 + x^2}\right|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \log_e(1 + \sqrt{2})\right)$$

例　$y = 2\sqrt{x}$　の $0 \le x \le 1$ の長さ

$$dl = \sqrt{1 + \left(1/\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{z^2 + 1}\,dz$$

$$z = \sqrt{x},\quad \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dz$$

上の結果を用いて、

$$L = \sqrt{2} + \log_e(1 + \sqrt{2})$$

８章　微分方程式

8.1　微分方程式とは

関数の微分を含んだ方程式　→　関数の形を求める。

例

条件の付かない場合

$$\frac{dy}{dx} = x + 1$$

両辺を x で積分する。

$$y = \int \frac{dy}{dx} dx = \int (x+1) dx = \frac{1}{2}x^2 + x + c$$　　積分定数が残る

条件の付く場合

$$\frac{dy}{dx} = x + 1 \qquad x = 0 \text{ のとき } y = 1$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x + c \qquad x = 0 \text{ を代入し、} y = c = 1$$

ゆえに、$y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$　　積分定数を決める

8.2　代表的な微分方程式の解法

１）$\frac{dy}{dx} = f(x)$ の場合

両辺を普通に x で積分する。

$$y = \int f(x) dx \qquad \int \frac{dy}{dx} dx = \int dy = y + c$$

２）$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$　変数分離形

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

例　$\frac{dy}{dx} = y$

$\int \frac{1}{y} dy = \log|y| = \int 1 dx = x + c$ より、$|y| = e^{x+c} = e^c e^x$

$\pm e^c$ を改めて c と書いて、$y = ce^x$

3） $\dfrac{dy}{dx}=f(y/x)$　**同次形**

$v=\dfrac{y}{x}$　**とおく。** $y=xv$ **より、** $\dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}=f(v)$

以上より、 $\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{f(v)-v}{x}$　　**変数分離形となり、解きやすくなる。**

例　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+1$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{f(v)-v}{x}=\frac{v+1-v}{x}=\frac{1}{x}$$

$$v=\log_e|x|+c$$

$$y=xv=x\log_e|x|+cx$$

4） $\dfrac{dy}{dx}+f(x)y=g(x)$　**1階線形微分方程式**

$y=ze^{-\int f(x)dx}$ **とおいて、**

$$\frac{dz}{dx}e^{-\int f(x)dx}-zf(x)e^{-\int f(x)dx}+f(x)ze^{-\int f(x)dx}=\frac{dz}{dx}e^{-\int f(x)dx}=g(x)$$

$\dfrac{dz}{dx}=g(x)e^{\int f(x)dx}$　**の形に変形できる。**

$$y=ze^{-\int f(x)dx}=e^{-\int f(x)dx}\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx$$

例　$\dfrac{dy}{dx}+ky=x$　　$x=0$ **のとき** $y=0$

$y=ze^{-kx}$　**として、**

$$\frac{dz}{dx}=xe^{kx}\qquad z=\int xe^{kx}dx=\frac{1}{k}xe^{kx}-\frac{1}{k}\int e^{kx}dx$$

$$=\frac{1}{k}xe^{kx}-\frac{1}{k^2}e^{kx}+c$$

$$y=e^{-kx}z=\frac{1}{k^2}(kx-1)+ce^{-kx}$$

$x=0$ **として、** $y=-\dfrac{1}{k^2}+c=0$ **より、** $c=\dfrac{1}{k^2}$

$$y=\frac{1}{k^2}(kx-1+e^{-kx})$$

4） $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-ky$　**２階線形微分方程式の特殊な例**

公式　$y=A\sin(\sqrt{k}\,x+\alpha)$　**または、** $y=c_1\sin\sqrt{k}\,x+c_2\cos\sqrt{k}\,x$

解法

両辺に $\dfrac{dy}{dx}$ **をかけて、**

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx}=-ky\frac{dy}{dx}$$

ここに、左辺 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ **より、**

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-k\int y\frac{dy}{dx}dx=-k\int ydy=-\frac{k}{2}y^2+c$$

$$\frac{1}{2c-ky^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{2c/k-y^2}}=\pm\sqrt{k}\,x+c'$$　　$y=\sqrt{\dfrac{2c}{k}}\sin\theta$　**とおくと、**

$$\int\frac{1}{\sqrt{\dfrac{2c}{k}}\cos\theta}\sqrt{\frac{2c}{k}}\cos\theta d\theta=\int d\theta=\theta=\pm\sqrt{k}\,x+c'$$

$$y=\sqrt{\frac{2c}{k}}\sin(\pm\sqrt{k}\,x+c')=\pm\sqrt{\frac{2c}{k}}\sin(\sqrt{k}\,x\mp c')$$

改めて、 $\pm\sqrt{\dfrac{2c}{k}}=\pm A$，　$\sin(\sqrt{k}\,x\mp c')=\sin(\sqrt{k}\,x+\alpha)$ **とおくことにより、**

$$y=A\sin(\sqrt{k}\,x+\alpha)$$

$$y=A\sin(\sqrt{k}\,x+\alpha)=A(\sin\sqrt{k}\,x\cos\alpha+\cos\sqrt{k}\,x\sin\alpha)$$

別表記　$=A\cos\alpha\sin\sqrt{k}\,x+A\sin\alpha\cos\sqrt{k}\,x$

$$=c_1\sin\sqrt{k}\,x+c_2\cos\sqrt{k}\,x$$

９章　偏微分

9.1　偏微分とは

$$y = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}$$

変数１つ　　　　　　　　　　**常微分**

$$y = f(x_1, x_2) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}$$

変数２つ　　　　　　　　　　**偏微分**

一般に

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial y}{\partial x_n}$$

定義

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2 + h) - f(x_1, x_2)}{h}$$

変数 x_i のみ変化させて他は固定したまま。

∂ の読み方、ディーまたはラウンド

一般に

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \cdots, x_i + h, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)}{h}$$

表記法は、

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \cdots, x_n) = y_{x_i} = f_{x_i} \quad \text{等}$$

9.2　偏微分の計算

例

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \quad \text{のとき}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_2 + x_1$$

他の変数は単なる定数と思って微分する。

$$y = x_1 \sin x_2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \sin x_2, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1 \cos x_2$$

$y = e^{x_1^2 + x_2^2}$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 e^{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_2 e^{x_1^2 + x_2^2}$$

9.3 高階の偏微分

$y = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_2 + x_1$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1 + x_2) = 2$$

同様に、$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 2$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_2 + x_1) = 1$$

$$= \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1}$$

2 回偏微分可能で、2 階偏導関数が連続であれば、$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}$

一般に、n 回偏微分可能で、n 階偏導関数が連続であれば、偏微分は交換可能である。

9.4 関数の極値

常微分の場合

$x = a$ において

$y' = 0$ かつ $y'' > 0$ のとき、極大

$y' = 0$ かつ $y'' < 0$ のとき、極小

例

$z = x^2 + y^2 - xy - 3y$ の極値を求めよ。

偏微分が 0

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x - 3 = 0$$

この方程式より、

$$x=1,\ y=2 \quad \to \quad z=-3$$

極大・極小・その他の判定

$$a_{11}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\quad a_{22}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2,\quad a_{12}=a_{21}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=1$$

$$a_{11}=2>0 \quad \text{かつ} \quad a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=3>0$$

$x=1,\ y=2$ **において極小値** -3 **である。**

２変数の場合、

$a_{11}>0$ **（または、**$a_{22}>0$**）のとき、**$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$**ならば、極小**

$a_{11}<0$ **（または、**$a_{22}<0$**）のとき、**$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0$**ならば、極大**

一般に*

$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv f(\mathbf{x})$ **とすると**

$$dy=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}dx_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j+\cdots \quad \text{である。}$$

ここで、 $\mathbf{A}=(a_{ij})$, $a_{ij}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ **とすると、行列 A をヘッセ行列という。**

定理

$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$**において、**$\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}=0$**であり、ヘッセ行列が正（負）値定符号ならば、**$f(\mathbf{x})$ **は**$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$**で極小（大）である。**

正（負）値定符号

行列 A が正（負）値定符号とは、微小なq_i **に対して**$\sum_{i,j}a_{ij}q_iq_j>0\ (<0)$**である。**

正（負）値定符号と同等な条件

$$\Leftrightarrow \quad a_{ii}>0,\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk}\end{vmatrix}>0,\cdots,|\mathbf{A}|>0 \qquad \text{（正値定符号）}$$

$$a_{ii}<0,\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk}\end{vmatrix}<0,\cdots,(-1)^n|\mathbf{A}|>0 \quad \text{（負値定符号）}$$

$\Leftrightarrow$ **行列 A の固有値がすべて正（負）**

１０章 重積分

10.1 重積分とは

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$$

x について c から d まで、 y について a から b まで積分する。

即ち、体積を求める。

図

10.2 重積分の計算

例

$$\int_0^1 \int_0^2 (x+y)dxdy$$

まず、 y を定数と思って x で積分する。

$$\int_0^2 (x+y)dx = [\tfrac{1}{2}x^2 + xy]_0^2 = 2 + 2y$$

その後、 y で積分する。（x, y の順序が逆でも可）

$$\int_0^1 (2+2y)dy = [2y + y^2]_0^1 = 3$$

$$\int_0^1 \int_0^2 (x+y)dxdy = \int_0^1 [\tfrac{1}{2}x^2 + xy]_0^2 dy = \int_0^1 (2+2y)dy$$
$$= [2y + y^2]_0^1 = 3$$

例

$$\int_0^1 \int_0^y (x+y)dxdy$$

$$\int_0^y (x+y)dx = [\tfrac{1}{2}x^2 + xy]_0^y = \frac{1}{2}y^2 + y^2 = \frac{3}{2}y^2$$

$$\int_0^1 \frac{3}{2}y^2 dy = [\tfrac{1}{2}y^3]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \int_0^y (x+y)dxdy = \int_0^1 [\tfrac{1}{2}x^2 + xy]_0^y dy = \int_0^1 (\tfrac{1}{2}y^2 + y^2)dy$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{2}[y^3]_0^1 = \frac{1}{2}$$

例

$$\int_0^b \int_0^a xydxdy = \int_0^b [\frac{1}{2}x^2]_0^a ydy = \frac{a^2}{2}\int_0^b ydy = \frac{a^2}{2}\times\frac{b^2}{2} = \frac{1}{4}a^2b^2$$

$$\int_0^b \int_0^a xydxdy = \int_0^a xdx \times \int_0^b ydy = \frac{a^2}{2}\times\frac{b^2}{2} = \frac{1}{4}a^2b^2$$

一般に、被積分関数が x **と** y **だけの関数の掛け算のとき、積分は２つの積分の積として計算される。**

$$\int_b^c \int_a^b f(x)g(y)dxdy = \int_a^b f(x)dx \times \int_c^d g(y)dy$$

10.3 積分の変数変換

例

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$$ **を計算する。**

変数変換 $\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{matrix}$ **を利用する。**

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta \qquad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$$ **：ヤコビアン** (Jacobian)

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial y/\partial r \\ \partial x/\partial\theta & \partial y/\partial\theta \end{vmatrix} \left(= \begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{vmatrix} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta \cdot r\cos\theta - (-r\sin\theta)\cdot\sin\theta$$

$$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

積分領域の変換

$$\begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 0 \le r < \infty \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{matrix}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2} rd\theta dr = \int_0^{\infty} e^{-r^2} rdr \times \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi \times [-\frac{1}{2}e^{-r^2}]_0^{\infty} = 2\pi \times \frac{1}{2} = \pi$$

トピックス

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$　**通常の定積分ではこの値は求まらない。そこで、**

$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$　**として、**

$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy = p$　**より、**

$$I = \sqrt{p}$$

一般に

$$\int\int_{V_x} \cdots \int f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \int\int_{V_u} \cdots \int g(u_1, u_2, \cdots u_n) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_n)} \right| du_1 du_2 \cdots du_n$$

ここに、

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \xrightarrow[x_i = x_i(u_1, u_2, \cdots, u_n)]{} g(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

V_x **：** x **で表した積分領域,**　V_u **：** u **で表した積分領域**

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_n)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_n} & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

：ヤコビアン（Jacobian）

前期総合演習

問題１　以下の式を具体的に和の形で表せ。答えは求めなくてよい。

１）$\sum_{k=2}^{5} a^k$　２）$\sum_{j=1}^{3} (3a_j + 1)$　３）$\sum_{k=2}^{4} a^k b^k$

４）$\sum_{k=1}^{3} (a_k b_k - 1)$　５）$\sum_{i=2}^{5} (a_{i\,i})^2$　６）$\sum_{i=3}^{6} b_{i,\,i+1}$

７）$\sum_{k=4}^{10} k$　８）$\sum_{i=1}^{4} (i^2 + 1)$　９）$\sum_{k=1}^{3} (2k+1)^2$

10）$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} i \times j$

問題２　以下の式をΣ記号を用いて表せ。

１）$1+2+3+4+\cdots+20$　２）$1+2+3+4+\cdots+(n-1)$

３）$m+(m+1)+(m+2)+\cdots+(m+r)$　４）$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_7b_7$

５）$a_5 + a_7 + a_9 + \cdots + a_{19}$　６）$a_1b_3 + a_2b_4 + a_3b_5 + \cdots + a_{10}b_{12}$

７）$a_1b_2 + a_2b_4 + a_3b_6 + \cdots + a_{10}b_{20}$

問題３　以下の和の値を求めよ。

１）$1+2+3+\cdots+50$　２）$20+19+18+\cdots+(-10)$

３）$3+5+7+\cdots+29$　４）$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r)$

５）$(a+r)+(a+r+1)+(a+r+2)+\cdots+(a+2r)$

６）$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^9$　７）$p+p^2+p^3+\cdots+p^n$

８）$ar^5+ar^6+ar^7+ar^8+\cdots+ar^{20}$　９）$ar^5-ar^6+ar^7-ar^8+\cdots-ar^{20}$

10）$\sum_{i=10}^{100} i$　11）$\sum_{i=1}^{10} (2i+1)$

12）$\sum_{i=10}^{20} ar^i$　13）$\sum_{i=0}^{10} (a+1)^i$

問題４　行列 A, B, C が以下の様に与えられているとき、次の値を求めよ。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

１）$2\mathbf{A}$　２）${}^t\mathbf{A}$　３）$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$

４）$2\mathbf{A}-(\mathbf{B}+\mathbf{C})$　５）$\mathbf{AB}$　６）${}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A}$

7） $\mathrm{tr}\ \mathbf{A}$ **8）** $\mathrm{tr}\ \mathbf{BA}$ **9）** $|\mathbf{A}|$

10） $|\mathbf{C}|$ 11） $|\mathbf{ABC}|$ 12） $|\mathbf{AA}|$

問題５　以下の行列式の値を求めよ。

1） $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$ **2）** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

3） $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{vmatrix}$ **4）** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 4 & 9 \end{vmatrix}$

5） $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ **6）** $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \\ d & d & d & d \end{vmatrix}$

7） $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & x^2+1 & x^3 & x^4 \\ x^2 & 1 & x^4+1 & x^5 \\ x^3 & 1 & 1 & x^6+1 \end{vmatrix}$ **8）** $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & a+1 & a+1 & a+1 \\ a & a+1 & a+2 & a+2 \\ a & a+1 & a+2 & a+3 \end{vmatrix}$

問題６　以下の連立方程式を行列表示で表し、解が１つに求まるかどうか判定せよ。

1） $\begin{aligned} ax \quad + y &= b \\ -ax - 2y &= c \end{aligned}$ 　　但し、$a \neq 0$

2） $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 + x_4 &= 4 \end{aligned}$

微分演習問題　　　学生番号　　　　　氏名

以下の関数を微分せよ。

1) $y = x^5$　2) $y = x^{-4}$　3) $y = 3x^2 + 5 + 2x^{-2}$　4) $y = e^x + \log_e x$

5) $y = \sin x + \cos x$　6) $y = x^3 e^x$　7) $y = (x+1)\log_e x$

8) $y = \sin x \cdot \log_e x$　9) $y = \dfrac{x^2}{x+2}$　10) $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

11) $y = (2x+3)^5$　12) $y = \sin(2x-1)$　13) $y = e^{x^2-2x}$

14) $y = (2x+1)^4(3x+4)^5$　15) $y = \dfrac{e^x \sin x}{x^2+x+1}$　16) $y = \sin\dfrac{x}{2x+1}$

情報基礎数学演習問題解答（計算は特に [ ] 内までやる必要はありません。）

1) $y = x^5$ $\quad y' = 5x^4$

2) $y = x^{-4}$ $\quad y' = -4x^{-5}$

3) $y = 3x^2 + 5 + 2x^{-2}$ $\quad y' = 6x - 4x^{-3}$

4) $y = e^x + \log_e x$ $\quad y' = e^x + \dfrac{1}{x}$

5) $y = \sin x + \cos x$ $\quad y' = \cos x - \sin x$

6) $y = x^3 e^x$ $\quad y' = 3x^2 e^x + x^3 e^x \left[= (3x^2 + x^3)e^x = (x+3)x^2 e^x \right]$

7) $y = (x+1)\log_e x$ $\quad y' = \log_e x + \dfrac{x+1}{x}$

8) $y = \sin x \cdot \log_e x$ $\quad y' = \cos x \cdot \log_e x + \dfrac{\sin x}{x}$

9) $y = \dfrac{x^2}{x+2}$ $\quad y' = \dfrac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} \left[= \dfrac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} = \dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2} \right]$

10) $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $\quad y' = \dfrac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \left[= -\dfrac{1}{\sin^2 x} \right]$

11) $y = (2x+3)^5$ $\quad y' = 10(2x+3)^4$

12) $y = \sin(2x-1)$ $\quad y' = 2\cos(2x-1)$

13) $y = e^{x^2 - 2x}$ $\quad y' = (2x-2)e^{x^2-2x} \left[= 2(x-1)e^{x^2-2x} \right]$

14) $y = (2x+1)^4 (3x+4)^5$

$$y' = 8(2x+1)^3(3x+4)^5 + 15(2x+1)^4(3x+4)^4$$

$$\left[= (54x + 47)(2x+1)^3(3x+4)^4 \right]$$

15) $y = \dfrac{e^x \sin x}{x^2 + x + 1}$

$$y' = \frac{\left(e^x \sin x + e^x \cos x\right)(x^2 + x + 1) - e^x \sin x \cdot (2x+1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$\left[= \frac{e^x \left\{ \sin x \cdot (x^2 - x) + \cos x \cdot (x^2 + x + 1) \right\}}{(x^2 + x + 1)^2} \right]$$

16) $y = \sin \dfrac{x}{2x+1}$ $\quad y' = \dfrac{(2x+1) - 2x}{(2x+1)^2} \cos \dfrac{x}{2x+1} \left[= \dfrac{1}{(2x+1)^2} \cos \dfrac{x}{2x+1} \right]$

演習解答

1） $y=-x^2+6x+3$

y**軸との交点：** $y=3$

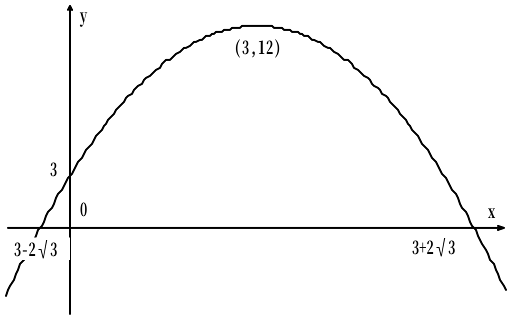
x**軸との交点：** $x=3\pm 2\sqrt{3}$

極大点：(3, 12)

極小点：なし

変曲点：なし

グラフの概形



2） $y=x^4-2x^2+1$

y**軸との交点：** $y=1$

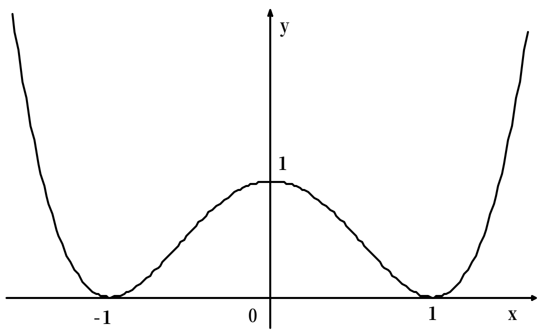
x**軸との交点：** $x=\pm 1$

極大点：(0, 1)

極小点：(-1, 0), (1, 0)

変曲点： $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{4}{9}\right),\ \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{4}{9}\right)$

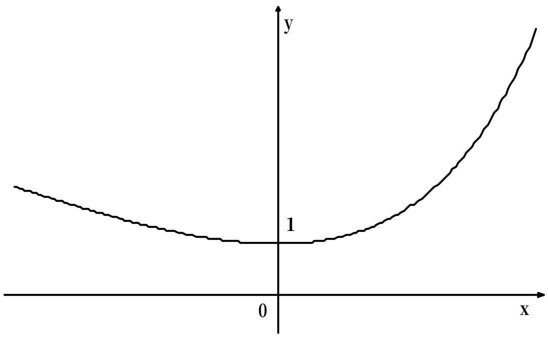
グラフの概形



3） $y=e^x-x$

y**軸との交点：** $y=1$

x 軸との交点：なし
極大点：なし
極小点：(0, 1)
変曲点：なし
グラフの概形



4） $y = e^{-x^2}$

y 軸との交点： $y = 1$
x 軸との交点：なし
極大点：(0, 1)
極小点：なし
変曲点：$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$
グラフの概形