３章　関数

3.1 関数とは

$$y = f(x)$$
$$y = f(x_1, x_2)$$

3.2 多項式

１次関数 $y = ax + b$

２次関数 $y = ax^2 + bx + c$

一般に、n 次関数 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

3.3 指数関数

1. 指数の性質

1)

$$2^1 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8 = 2^3$$
$$2^2 \times 2^3 = 4 \times 8 = 32 = 2^5$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

2)

$$2^0 \times 2^3 = 2^{0+3} = 2^3 \quad \therefore 2^0 = 1 \qquad\qquad a^0 = 1$$

3)

$$2^3 \times 2^{-3} = 2^{3-3} = 2^0 = 1 \quad \therefore 2^{-3} = \frac{1}{2^3} \qquad\qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

4)

$$(2^2)^3 = 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^6 \qquad\qquad (a^m)^n = a^{m \times n}$$

公式

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$a^0 = 1$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

2. 指数関数のグラフ

$y = 2^x$ **のグラフ**

$y = 2^{-x}$ **のグラフ**

3.4 対数関数

1. 対数の性質

1)

$$2^3=8 \Leftrightarrow \log_2 8=3$$
$$3^4=81 \Leftrightarrow \log_3 81=4$$
$$a^x=y \Leftrightarrow \log_a y=x$$

$$y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y$$

2)

$$a^1=a \Leftrightarrow \log_a a=1$$

$$\log_a a=1$$

3)

$$a^y=x^n \Leftrightarrow \log_a x^n=y$$
$$a^{y/n}=x \Leftrightarrow \log_a x=\frac{y}{n}$$
$$\therefore\ y=\log_a x^n=n\log_a x$$

$$\log_a x^n=n\log_a x$$

4)

$$x=a^p \Leftrightarrow p=\log_a x$$
$$y=a^q \Leftrightarrow q=\log_a y$$
$$\log_a xy=\log_a a^p a^q=\log_a a^{p+q}$$
$$=(p+q)\log_a a=p+q$$
$$=\log_a x+\log_a y$$

$$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$$

5)

$$a^y=x \Leftrightarrow y=\log_a x$$
$$\therefore\ a^{\log_a x}=x$$

$$a^{\log_a x}=x$$

6)

$$\log_b x=\log_b a^{\log_a x}=\log_a x\times\log_b a$$
$$\therefore\ \log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$$ **底の変換**

公式

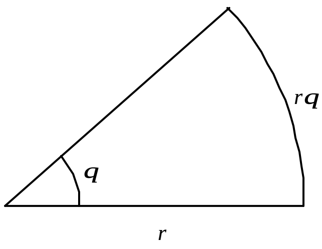
$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log_a x^n = n \log_a x$$
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$
$$a^{\log_a x} = x$$
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

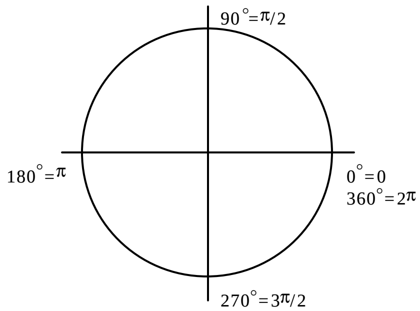
2. 対数関数のグラフ

$y = \log_2 x$ **のグラフ**

3.5 三角関数

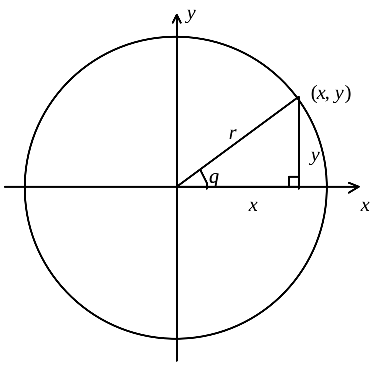
1. 角度の単位





ラジアンによる角度表現

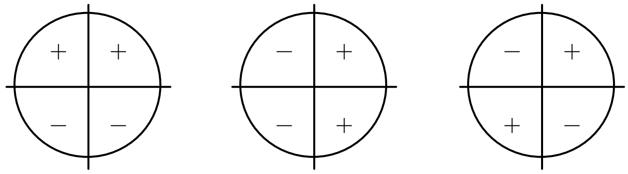
2. 三角関数とは



$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{y/r}{x/r} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

三角関数と符号

$\sin\theta$　　　　$\cos\theta$　　　　$\tan\theta$



三角関数の代表的な値

θ	0	π/6	π/4	π/3	π/2	3π/4	π	5π/4	3π/2	7π/4	2π
$\sin\theta$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$1/\sqrt{2}$	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	1
$\tan\theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$		-1	0	1		-1	0

3. 三角関数の基本的な公式

図による解釈から以下の関係が示される。

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

$$\sin(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\sin\theta,\quad \cos(-\theta) = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \frac{y}{r} = \sin\theta,\quad \cos(\pi - \theta) = \frac{-x}{r} = -\cos\theta,$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$$

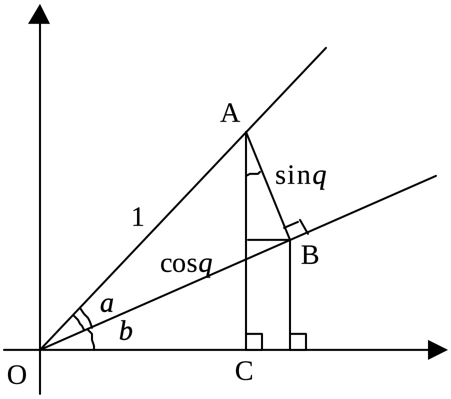
$$\sin(\pi + \theta) = \frac{-y}{r} = -\sin\theta,\quad \cos(\pi + \theta) = \frac{-x}{r} = -\cos\theta,$$

$$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$$

$$\sin(\pi/2 - \theta) = \frac{x}{r} = \cos\theta,\quad \cos(\pi/2 - \theta) = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$\tan(p/2-q)=\frac{\sin(p/2-q)}{\cos(p/2-q)}=\frac{\cos q}{\sin q}=\frac{1}{\tan q}$$

4. **加法定理**



$\mathrm{OA}=1$, $\mathrm{AB}=\sin q$, $\mathrm{OB}=\cos q$ **の関係から、**

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

$$\tan(a+b)=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}$$

分母分子を $\cos a\cos b$ **で割って、**

$$=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$

倍角の公式

加法定理で、 $a=b=q$ **とすると、以下の倍角の公式を得る。**

$$\sin 2q=2\sin q\cos q$$

$$\cos 2q=\cos^2 q-\sin^2 q$$

$$\tan 2q=\frac{2\tan q}{1-\tan^2 q}$$

半角の公式もこれより、簡単に求められる。

４章　極限

4.1 極限の例

1. 無限大に関する極限

例

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad \lim_{n\to-\infty}\frac{1}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1000}{n}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b}{n+a}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(c+\frac{b}{n+a}\right)=c$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$ **：分母の次数の１番高い項で割る。**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n-2}=2 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2-2}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{3n^2-2n-1}=\frac{2}{3} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{(n-1)(n+1)}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{-n^3+1}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}=\infty \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n+1}=-\infty$$

直感的方法

分母の次数＝分子の次数　のとき、

分母分子の最大次数の項の係数に注目

分母の次数＞分子の次数　のとき、

極限は 0

分母の次数＜分子の次数　のとき、

極限は ±∞

2. 定数の極限

例

$$\lim_{x\to 0} x = 0 \qquad \lim_{x\to 0}(1+x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0}(x^2+2x+3) = 3 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+x} = 1$$ ：分母の１番小さい次数の項で割る

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{2x^2-3x} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\log_a(1+x) = 0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

3. その他の公式

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty \ \ (a>1) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n} = 0 \ \ (a>1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\log_a n = \infty \ \ (a>1) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n^b} = 0 \ \ (a>1, b>0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$ （e =2.71828⋯：ネーピア(Napier)の数）

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

例

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n'\to\infty}\left(1+\frac{1}{n'}\right)^{n'x} = \lim_{n'\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n'}\right)^{n'}\right\}^x = e^x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h/2} = \lim_{h\to 0}2\frac{\sin h}{h} = 2$$

５章　微分

5.1 微分とは

$y = f(x)$　のとき

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ ：関数 $y = f(x)$ の x における微分

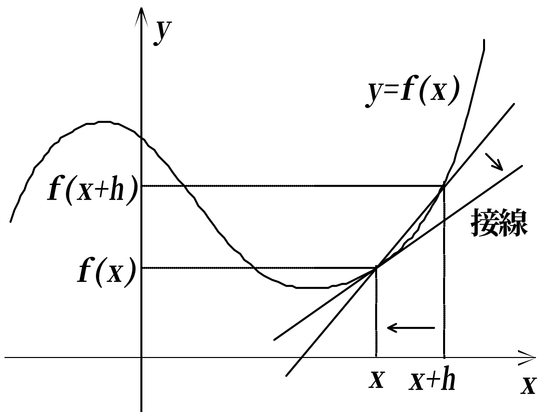


図　接線の傾きと微分

微分の他の表現法

$$\frac{dy}{dx}\left(= \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = y' = f'(x) \right)$$

例

$y = f(x) = a$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{a-a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$y = f(x) = x$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$y = f(x) = x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$$

$y = f(x) = x^3$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

公式

$y=f(x)=x^n$　**のとき**　$\dfrac{dy}{dx}=nx^{n-1}$

例

$$y=x^5\to\frac{dy}{dx}=5x^4$$

$$y=x^{20}\to\frac{dy}{dx}=20x^{19}$$

$$y=x^{-3}\to\frac{dy}{dx}=-3x^{-4}$$

$$y=x^{1/2}\to\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$y=\sqrt{x^3}\to\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}x^{1/2}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

5.2 算術関数の微分

公式

$$y=e^x\to\frac{dy}{dx}=e^x$$

$$y=\log_e x\to\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$y=\sin x\to\frac{dy}{dx}=\cos x$$

$$y=\cos x\to\frac{dy}{dx}=-\sin x$$

$$y=\tan x\to\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

解説

$$\frac{d}{dx}e^x=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-e^0}{h}=e^x\cdot 1=e^x$$

$y=a^x$ **のグラフで** $x=0$ **での傾きが 1 のときが、** $a=e$ **である。**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$ との関係

$n \to \infty$ の極限で、 $\dfrac{e^{1/n}-1}{1/n}=1$　即ち、 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$

準備　$\cos 2\boldsymbol{a} = \cos^2\boldsymbol{a} - \sin^2\boldsymbol{a} = 1-2\sin^2\boldsymbol{a}$

ゆえに、 $\cos 2\boldsymbol{a} - 1 = -2\sin^2\boldsymbol{a}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2(h/2)}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)\cdot\sin(h/2)}{h/2} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}\\
&= \cos x
\end{aligned}$$

$\cos x$ の微分も同様に計算出来る。

5.3 関数の定数倍と和の微分

$$y = af(x) \to \frac{dy}{dx} = af'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{af(x+h)-af(x)}{h} = \lim_{h\to 0} a\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = af'(x)$$

$$y = f(x)+g(x) \to \frac{dy}{dx} = f'(x)+g'(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}+\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\\
&= f'(x)+g'(x)
\end{aligned}$$

例

$$y = ax + b \to \frac{dy}{dx} = a \cdot 1 + 0 = a$$

$$y = 2x^2 - 3x + 1 \to \frac{dy}{dx} = 4x - 3$$

$$y = e^x + x^3 \to \frac{dy}{dx} = e^x + 3x^2$$

$$y = \sin x + \cos x \to \frac{dy}{dx} = \cos x - \sin x$$

演習

$$y = f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$$
$$y = f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 4$$
$$y = f(x) = -3x^4 + 5x$$
$$y = f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$$
$$y = f(x) = (x+1)(x-1)$$
$$y = f(x) = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$y = f(x) = \sqrt{x} + \log_e x$$

5.4 関数の掛け算の微分

公式

$$y = f(x)g(x) \to \frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

演習

$$y = f(x)g(x)h(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$y = x^2(2x^4 + 1)$

$y = (x^4 + x^2 + 1)(x^3 + x)$

$y = e^x(x^2 + x + 1)$

$y = x \log_e x$

$y = e^x \sin x$

注意

$y = e^x \cos x \to y' = e^x \cos x + e^x(-\sin x)$　**括弧を忘れてはいけない。**

5.5 関数の割り算の微分

公式

$$y = f(x)/g(x) \to \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

演習

$$y = \frac{x}{x+1}$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$$

$$y = \frac{e^x}{x}$$

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y = \frac{1}{x^n}$$

5.6 汎関数の微分

汎関数とは、 $y = f(z),\ z = g(x)$ （$y = f(g(x))$）**の形になっているもの**

例

$y = (x^2 + x + 1)^5 : g(x) = x^2 + x + 1,\ f(z) = z^5,$

$y = e^{x^2} : g(x) = x^2,\ f(z) = e^z$

公式

$y = f(g(x))$

$z = g(x)$ **とおくと** $y = f(z)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz} = g'(x)\frac{dy}{dz}$$

例

$y = (x^2 + x + 1)^5$

$$z = x^2 + x + 1,\ y = z^5,\ \frac{dz}{dx} = 2x + 1,\ \frac{dy}{dz} = 5z^4 = 5(x^2 + x + 1)^4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz} = (2x+1)\times 5(x^2 + x + 1)^4$$

$y = e^{x^2}$

$$z = x^2,\ y = e^z,\ \frac{dz}{dx} = 2x,\ \frac{dy}{dz} = e^z = e^{x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz} = 2xe^{x^2}$$

$y = \log_e x$ **の微分の証明**

$x = e^y$ **の両辺を** x **で微分**

$1 = e^y \cdot \dfrac{dy}{dx} = x \cdot \dfrac{dy}{dx}$ **ゆえに、** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$

5.7 一般的な関数の微分

微分公式まとめ

1. $y = x^n \quad \rightarrow \quad y' = nx^{n-1}$
2. $y = e^x \quad \rightarrow \quad y' = e^x$
3. $y = \log_e x \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{x}$
4. $y = \sin x \quad \rightarrow \quad y' = \cos x$
5. $y = \cos x \quad \rightarrow \quad y' = -\sin x$
6. $y = \tan x \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
7. $y = af(x) \quad \rightarrow \quad y' = af'(x)$
8. $y = f(x) + g(x) \quad \rightarrow \quad y' = f'(x) + g'(x)$
9. $y = f(x)g(x) \quad \rightarrow \quad y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

10. $y = f(x)/g(x) \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

11. $y = f\left(g(x)\right) \quad \rightarrow \quad z = g(x)$ として、$y' = \dfrac{dz}{dx}\dfrac{df(z)}{dz}$

例

$y = (2x+1)^4(3x+4)^5$

$$f(x) = (2x+4)^4 \qquad f'(x) = 2\cdot 4(2x+1)^3 = 8(2x+1)^3$$

$$g(x) = (3x+4)^5 \qquad g'(x) = 3\cdot 5(3x+4)^4 = 15(3x+4)^4$$

$$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$= 8(2x+1)^3(3x+4)^5 + 15(2x+1)^4(3x+4)^4$$

$y = \dfrac{e^x \sin x}{x^2+x+1}$

$$f(x) = e^x \sin x \qquad f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$$

$$g(x) = x^2+x+1 \qquad g'(x) = 2x+1$$

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$= \frac{e^x(\sin x + \cos x)(x^2+x+1) - e^x \sin x\cdot(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$y = \sin\dfrac{x}{2x+1}$

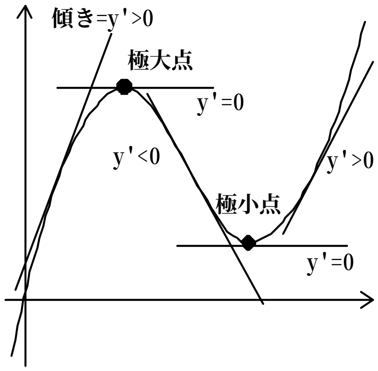
$$z = \frac{x}{2x+1} \qquad y = \sin z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{(2x+1) - x\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dz} = \cos z = \cos\frac{x}{2x+1}$$

$$y' = \frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz} = \frac{1}{(2x+1)^2}\cos\frac{x}{2x+1}$$

5.8 極大値と極小値



関数の増加、減少は接線の傾き、即ち微分の符号で分かる。

極大点・極小点の y **座標の値を極大値・極小値（総称：極値）という。**

例１　$y = x^2 - 2x - 3$　**の極値を求めよ。**

$$y' = 2x - 2 = 2(x-1) = 0 \quad \therefore x = 1$$

関数増減表

x		1	
y'	－	0	＋
y	↘	-4	↗

$x = 1$**のとき極小値**　$y = -4$　**（極小点：**(1,-4)**）**

例２　$y = x^3 - 6x^2 + 9x$　**の極値を求めよ。**

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x^2 - 4x + 3) \\ &= 3(x-1)(x-3) = 0 \end{aligned}$$

$x = 1$　**または**　$x = 3$

関数増減表

x		1		3	
y'	+	0	－	0	+
y	↗	4	↘	0	↗

$x = 1$**のとき極大値**　$y = 4$　**（極大点：**(1,4)**）**

$x = 3$**のとき極小値**　$y = 0$　**（極小点：**(3,0)**）**

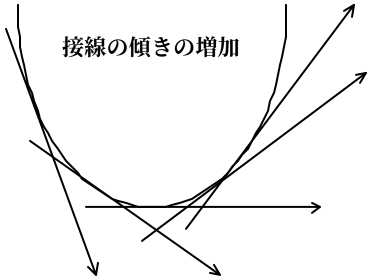
5.9　２階微分と変曲点

２階微分とは

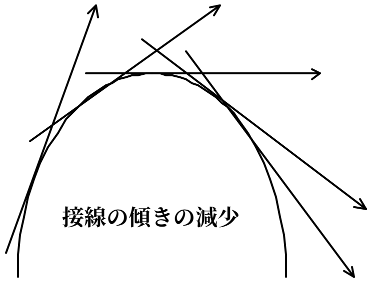
１階微分： $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 4 \;\to\; \dfrac{dy}{dx} = y' = 3x^2 + 6x - 9$

２階微分： $\dfrac{dy}{dx} = y' = 3x^2 + 6x - 9 \;\to\; \dfrac{d^2y}{dx^2} = y'' = 6x + 6$

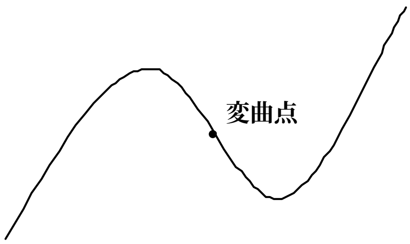
２階微分と変曲点の意味



$y'' > 0$



$y'' < 0$



変曲点では $y'' = 0$

例　以下の関数の変曲点を求める

$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 4 \qquad \to\; y' = 3x^2 + 6x - 9$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \to\; y'' = 6x + 2$

$y'' = 6x + 6 = 0 \;\;\therefore x = -1$

$x = -1$ **のとき** $y = 7$　　　**変曲点** $(-1,7)$

x		-1	
y''	−	0	＋
y	**上に凸**	7	**下に凸**

5.10　グラフの概形

例１　$y = f(x) = x^2 - 2x - 3$　**のグラフの概形を描け**

y **軸との交点**

$x = 0$ **とおいて**　$y = -3$

x 軸との交点

$y=0$ **とおいて**　$y=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0 \quad \therefore x=-1, 3$

無限遠でのふるまい

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$$

極値

$y'=2x-2=2(x-1)=0 \quad \therefore x=1$

$x=1$ **のとき極小値**　$y=-4$

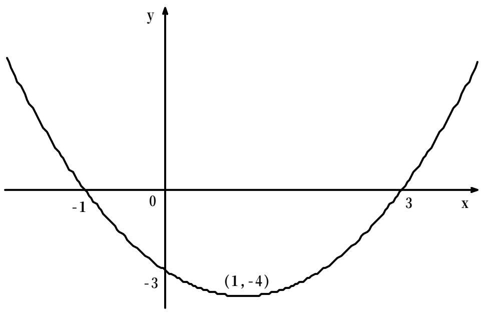
関数増減表

x		1	
y'	−	-4	＋
y	↘	0	↗

変曲点

$y''=2>0$ **より、変曲点は存在しない。**

グラフの概形



例２　$y=x^3-6x^2+9x$　**のグラフの概形を描け。**

y 軸との交点

$x=0$ **とおいて**　$y=0$

x 軸との交点

$y=0$ **とおいて**　$y=x^3-6x^2+9x=x(x-3)^2 \quad \therefore x=0, 3$

無限遠でのふるまい

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

極値

$$y' = 3x^2 - 12x + 9$$
$$= 3(x^2 - 4x + 3)$$
$$= 3(x-1)(x-3) = 0 \quad x = 1, 3$$

関数増減表

x		1		3	
y'	+	0	—	0	+
y	↗	4	↘	0	↗

$x = 1$**のとき極大値** $y = 4$ （**極大点：**$(1, 4)$）

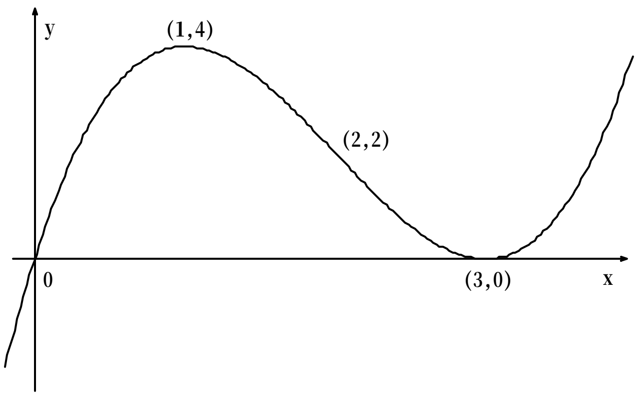
$x = 3$**のとき極小値** $y = 0$ （**極小点：**$(3, 0)$）

変曲点

$y'' = 6x - 12 = 6(x-2) = 0 \quad \therefore x = 2$

$x = 2$ **のとき** $y = 2$ （**変曲点：**$(2, 2)$）

グラフの概形



演習　以下のグラフの概形を描け

1. $y = x^2 + 4x - 1$
2. $y = -x^2 + 6x + 3$
3. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$
4. $y = x^4 - 2x^2 + 1$
5. $y = x + \dfrac{1}{x}$
6. $y = e^x - x$

7.　$y = e^{-x^2}$

5.11 Taylor 展開

関数 $f(x)$ が無限回微分可能（C^{∞} クラス）ならば、以下のような展開が出来る。

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Taylor **展開**

特に $a = 0$ **の場合、マクローリン（**Maclaurin**）展開と呼ぶ。**

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Maclaurin **展開**

例

1） $y = e^x$

$f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = e^x$

$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = 1$　**より、**

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

2） $y = \sqrt{1+x}$

$$f(x) = (1+x)^{1/2}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2},$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}, \quad \cdots$$

$f(0) = 1,\quad f'(0) = \frac{1}{2},\quad f''(0) = -\frac{1}{4},\quad f'''(0) = \frac{3}{8},\quad \cdots$　**より、**

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2!}x^2 + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots\end{aligned}$$

演習　以下の展開式を導け。

$$(1+x)^{a} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

注意　$x \approx 0$　**のとき、**$(1+x)^{a} \approx 1+\alpha x$　**これはよく利用される。**

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

注意　$x \approx 0$　**のとき、**$\sin x \approx x,\ \cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{x^i}{i}$$

5.12 微分の応用

例

生産高x**に対して、企業の費用関数が**　$c = 2 + x^3$　**であるとする。**

1. **この関数の概形を描け。（但し、**$x \geq 0$**とする。）**
2. **生産物当りの費用**c/x**を最小にする**x**と、そのときの費用**c**を求めよ。**
3. **企業の利益**$px - c$**（但し、**p**は価格）を最大にする**x**を求めよ。**