経営情報実践シリーズ１

基礎からの数学

福山平成大学　経営情報学科

福井正康

まえがき

私達の勤務する大学は地方都市にある経営学部の単科大学です。特に経営情報学科では、科学的な分析知識を必要としながら、なかなか思うような講義が行えないのが現状です。これは、学生の学力と学習意欲の差が原因となり、講義の難易度の焦点を絞りえないのが原因と考えられます。これを補うために参考書は必須と考えられますが、私達の学生が抵抗なく入っていけるレベルのものはなかなか見つからないのが現状です。

そこで、読み始めるにしきいが低く、最後は大学院入試に耐えるという構想のもとに、経営情報学科学生の基礎的学力を養成するシリーズ本を執筆することにいたしました。厳密性はある程度犠牲にしても、例を重視し直感的な理解を求める。これを基本方針として、数学、統計学、ＯＲ、情報科学、プログラミング技術等について、刊行してゆくつもりです。

講義は、本書の簡単な部分を利用して、独学用には全体を通して学習し、しっかりとした基礎学力を付ける。なかなか難しい問題ですが、どこまで理想に近づけるでしょうか。本書の作成に当っては、本学学生にモニターの協力をお願いしました。学生の目で分かり易さを評価してもらうことは価値のあることだと考えます。協力していただいた学生諸君には深く感謝致します。学生の学力向上に本書が少しでも役立てば、これほどの歓びはありません。

福山平成大学経営情報学科
福井正康

１章　数列

1.1 数列とは

1) 数列の例

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ・・・・・・・・・・

1024, 512, 256, 128, 64, ・・・・・・

3, 5, 2, 3, 4, 7, 1, 8, ・・・・・・・・・・

増加数列，減少数列，それ以外

有限数列，無限数列

$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, \cdots$

$S_1, S_2, S_3, S_4, \cdots, S_n, \cdots$

2) 等差数列

1, 3, 5, 7, 9, ・・・・・・・・・・　　**初項** 1　**公差** 2

100, 90, 80, 70, ・・・・・・・　　**初項** 100 **公差** -10

初項 1.2，**公差** 0.2 **の等差数列**

初項 a，**公差** d **の等差数列**　　**一般項** $a_n = a + (n-1)d$

3) 等比数列

1, 2, 4, 8, 16, ・・・・・・・・・　　**初項** 1　**公比** 2

1024, 512, 256, 128, ・・・　　**初項** 1024 **公比** 1/2

初項 2，**公比** 3 **の等比数列**

初項 1，**公比** 1/2 **の等比数列**

初項 a，**公比** r **の等比数列**　　**一般項** $a_n = ar^{n-1}$

1.2 Σ記号の使用法

使用例

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = \sum_{i=1}^{10} a_i$$

$$b_5 + b_6 + b_7 + \cdots + b_{20} = \sum_{i=5}^{20} b_i$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{i=2}^{5} a_i = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i{}^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2$$

$$\sum_{k=1}^{5} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 + a_5 b_5$$

$$\sum_{i=1}^{4} ca_i = ca_1 + ca_2 + ca_3 + ca_4$$

$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$$= c\sum_{i=1}^{4} a_i$$

一般に $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$

$$\sum_{i=1}^{3} (a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3)$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_i + \sum_{i=1}^{3} b_i$$

一般に $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25$$

$$\sum_{i=1}^{5} (i + 1) = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

$$\sum_{i=1}^{5} a = a + a + a + a + a$$

$$\sum_{i=1}^{4} a_i b_{i+1} = a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_4 b_5$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2i+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \cdots + \frac{n}{2n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}a_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{2}a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{3}(a_{i1}+a_{i2})$$
$$= (a_{11}+a_{12})+(a_{21}+a_{22})+(a_{31}+a_{32})$$
$$= (a_{11}+a_{21}+a_{31})+(a_{12}+a_{22}+a_{32})$$
$$= \sum_{j=1}^{2}(a_{1j}+a_{2j}+a_{3j})$$
$$= \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}a_{ij}$$

一般に $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$ **Σ記号は交換可能**

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}a_ib_j = \sum_{i=1}^{3}(a_ib_1+a_ib_2)$$
$$= (a_1b_1+a_1b_2)+(a_2b_1+a_2b_2)+(a_3b_1+a_3b_2)$$
$$= a_1(b_1+b_2)+a_2(b_1+b_2)+a_3(b_1+b_2)$$
$$= (a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{3}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2}b_j\right)$$

一般に $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j = \left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}b_j\right)$ **添字毎の掛け算は分解可能**

公式

$$\sum_{i=1}^{n}ca_i = c\sum_{i=1}^{n}a_i$$
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n}a_i + \sum_{i=1}^{n}b_i$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j = \left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}b_j\right)$$

1.3 数列の和の計算

等差数列の和

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

計算法

$$\begin{array}{rl} S_n = & a \quad + (a+d) \quad + \cdots + (a+(n-2)d) \quad + (a+(n-1)d) \\ +)\ S_n = & (a+(n-1)d) \quad + (a+(n-2)d) \quad + \cdots + (a+d) \quad + \ a \\ \hline 2S_n = & (2a+(n-1)d) + (2a+(n-1)d) + \cdots + (2a+(n-1)d) + (2a+(n-1)d) \\ = & (2a+(n-1)d) \times n \end{array}$$

$$S_n = na + \frac{n(n-1)d}{2}$$

等差数列の和の演習

以下の和を求めよ。

1） $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$

2） $S = 1 + 3 + 5 + +7 + \cdots + 49$

3） $S = 12 + 17 + 22 + 27 + \cdots + 97$

等比数列の和

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

計算法

$$\begin{array}{rl} S_n = & a + ar + ar^2 \cdots + ar^{n-2} \quad + ar^{n-1} \\ -)\ rS_n = & \quad ar + ar^2 \cdots + ar^{n-2} \quad + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline (1-r)S_n = & a \qquad\qquad - ar^n = a(1-r^n) \end{array}$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad r \neq 1$$

等比数列の和の演習

1） $S = p + p^2 + p^3 + \cdots + p^{10}$

2） $S = \sum_{i=5}^{10} ar^i$

２章　行列

2.1 **行列とは**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3.2 & 4.1 & 2.3 & -2.5 \\ 5.1 & -2.4 & 1.5 & 3.3 \\ -8.1 & 1.2 & -2.7 & 4.8 \end{pmatrix}$$

行列の成分

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{について} \qquad \begin{array}{l} (\mathbf{A})_{12} = -3 \\ (\mathbf{A})_{31} = 4 \quad \text{等} \\ \quad \vdots \end{array}$$

一般的な行列の成分

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{成分表示} \quad (\mathbf{A})_{ij} = a_{ij}$$

正方行列　$\mathbf{A}(n \times n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{のように行と列の数が等しいもの}$$

一般には

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

対角行列　$\mathbf{W}(n \times n)$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_n \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{W})_{ij} = \begin{cases} w_i & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases} = w_i \boldsymbol{d}_{ij} \quad \text{(デルタ)}$$

単位行列　$\mathbf{I}(n\times n)$

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\qquad (\mathbf{I})_{ij}=\boldsymbol{d}_{ij}=\begin{cases}1 & \text{for } i=j\\ 0 & \text{for } i\neq j\end{cases}\qquad \boldsymbol{d}_{ij}\ \text{：クロネッカーのデルタ}$$

行列の転置　$\mathbf{B}(n\times m)={}^{t}\mathbf{A}(m\times n)$

Aの転置行列　${}^{t}\mathbf{A}$　$({}^{T}\mathbf{A}\quad \mathbf{A}^{T}\quad \mathbf{A}')$

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 5 & 2 & -4\\ 8 & 1 & -2\end{pmatrix}\qquad {}^{t}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 8\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & -4 & -2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 6\\ -2 & 1 & 5\end{pmatrix}\qquad {}^{t}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\\ 6 & 5\end{pmatrix}$$

一般に

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\qquad {}^{t}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

成分表示

$$({}^{t}\mathbf{A})_{ij}=a_{ji}$$

$$\mathbf{B}={}^{t}\mathbf{A}\leftrightarrow b_{ij}=a_{ji}$$

対称行列　$\mathbf{A}(n\times n)$

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 0 & 2\\ 5 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

一般に

$$\mathbf{B}={}^{t}\mathbf{A}=\mathbf{A}\leftrightarrow b_{ij}=a_{ji}$$

2.2 行列の演算

行列の定数倍　$\mathbf{B}(m\times n)=k\mathbf{A}(m\times n)$

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 6\\ -2 & 1 & -5\end{pmatrix}\qquad 2\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6 & -2 & 12\\ -4 & 2 & -10\end{pmatrix}$$

一般に

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\text{のとき } k\mathbf{A}=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn}\end{pmatrix}\text{より}$$

$$\left(k\mathbf{A}\right)_{ij}=ka_{ij}=k\left(\mathbf{A}\right)_{ij}$$

また、$\mathbf{B}=k\mathbf{A}$ という式は

$$\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn}\end{pmatrix}\text{となり、}$$

成分表示では$\left(\mathbf{B}\right)_{ij}=\left(k\mathbf{A}\right)_{ij}=k\left(\mathbf{A}\right)_{ij}$ **または、** $b_{ij}=ka_{ij}$ **となる。**

注意）行列が等しいとは、行数、列数とすべての成分が等しいこと

行列の和　$\mathbf{C}(m\times n)=\mathbf{A}(m\times n)+\mathbf{B}(m\times n)$

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 6\\ -2 & 1 & -5\end{pmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}\text{のとき}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 9\\ 0 & 4 & -7\end{pmatrix}$$

一般に

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}\leftrightarrow c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

行列の積　$\mathbf{C}(m\times n)=\mathbf{A}(m\times p)\mathbf{B}(p\times n)$

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1\times 2+(-1)\times(-1)+0\times 1 & 1\times 0+(-1)\times 3+0\times 0\\ 0\times 2+3\times(-1)+2\times 1 & 0\times 0+3\times 3+2\times 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -1 & 9\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 4\\ -2 & 2 & -2\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

例

$$\mathbf{A}(1\times 2)=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}(2\times 3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

$\mathbf{AB}(1\times 3)=\begin{pmatrix}-1 & 8 & 4\end{pmatrix}$　**は計算できても、BA は計算できない。**

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\quad \mathbf{BA}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

たとえ計算出来ても一般に　$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$

$\mathbf{A}(m\times n),\mathbf{B}(p\times q)$　**のとき**

$\mathbf{C}(m\times q)=\mathbf{A}(m\times n)\mathbf{B}(p\times q)$ **と計算出来るのは** $n=p$ **の場合**

$\mathbf{C}(p\times n)=\mathbf{B}(p\times q)\mathbf{A}(m\times n)$ **と計算出来るのは** $q=m$ **の場合**

成分表示

$$\mathbf{C}(m\times n)=\mathbf{A}(m\times p)\mathbf{B}(p\times n)$$

$$\leftrightarrow c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

行列のトレース　$\mathrm{tr}\mathbf{A}(n\times n)$

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 5 & 2 & -4\\ 8 & 1 & -2\end{pmatrix}\qquad \mathrm{tr}\mathbf{A}=1+2+(-2)=1=\mathrm{tr}\,{}^t\mathbf{A}$$

成分表示

$$\mathrm{tr}\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

2.3 行列の性質と演算

1) $\mathbf{IA}=\mathbf{A}$, $\mathbf{AI}=\mathbf{A}$

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad \text{のとき}$$

$$\mathbf{AI}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\mathbf{A}$$

$$\mathbf{IA}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\mathbf{A}$$

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix},\ \mathbf{I}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad \text{のとき}\quad \mathbf{AI}=\mathbf{A}$$

但し、IA は計算出来ない。

2) ${}^t(\mathbf{A}+\mathbf{B})={}^t\mathbf{A}+{}^t\mathbf{B}$

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\quad \text{のとき}\ {}^t(\mathbf{A}+\mathbf{B})={}^t\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

$${}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad {}^t\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^t\mathbf{A} + {}^t\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3) ${}^t(\mathbf{AB}) = {}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A}$

例

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **のとき** ${}^t(\mathbf{AB}) = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

$${}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad {}^t\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ **が対称行列の場合**

$${}^t(\mathbf{AB}) = {}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A} = \mathbf{BA}$$

4) $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **のとき** $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = 9 \qquad \mathrm{tr}(\mathbf{BA}) = 9$$

2.4 行列の応用１

1) １次変換

例

$$x' = 2x - y$$
$$y' = x + 3y$$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}$ **より**

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ **とすると**

上の１次変換は $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ **と書ける。**

2) 連立１次方程式

例

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ **より**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ **とすると**

上の方程式は $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ **と書ける。**

例

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 3x - y &= 5 \end{aligned} \qquad \mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

解 $x = 2, y = 1$ **1つに決まる**

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x + 2y &= 5 \end{aligned} \qquad \mathbf{A'x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

解　なし

場合によっては無数にある場合があるので、1つに決まらない

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$**を計算してみる。**

Aの場合 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -7 \neq 0$

A′の場合 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$

この0**であるかどうかが、解が1つに決まるかどうかを決める。**

このような量を行列式という。

2.5 行列式

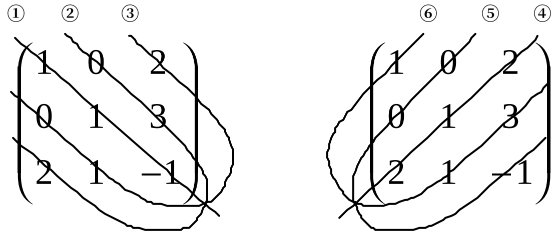
例

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$ **のとき、** $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - (-2) \times 3 = 8$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ **のとき、** $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c = ad - bc$

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\2&1&-1\end{pmatrix}\quad \text{のとき}$$



$|\mathbf{A}|=①+②+③-④-⑤-⑥$ で計算する。

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&3\\2&1&-1\end{vmatrix}$$
$$=1\times1\times(-1)+0\times3\times2+2\times1\times0-2\times1\times2-0\times0\times(-1)-1\times1\times3$$
$$=-1-4-3=-8$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\quad \text{のとき}$$

$$|\mathbf{A}|=aei+bfg+chd-ceg-bdi-ahf$$

2.7 行列式の性質と計算

0) **ある行（列）の成分は行列式の計算の各項の中に必ず 1 回だけ現れる。**

1) $|{}^t\mathbf{A}|=|\mathbf{A}|$

例

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2 \qquad |{}^t\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}=-2$$

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=1+4=5 \qquad |{}^t\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&1\\2&0&1\end{vmatrix}=1+4=5$$

2) **1 つの行（列）に共通因子があればくくり出せる。**

例

$$\begin{vmatrix}1&2\\2&6\end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}=2\times1=2$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 3 \times 5 = 60$$

例

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ **のとき**

$$|2\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2^3 \times |\mathbf{A}|$$

一般に

$$|k\mathbf{A}(n \times n)| = k^n |\mathbf{A}|$$

3) **2つの行（列）を入れ換えると符号が変る。**

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

4) **2つの行（列）の各成分が同じならば行列式は** 0

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

4 **補**) **2つの行（列）の各成分が比例するなら、行列式は** 0

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

5) ある行列の 1 行（列）成分が (1,1) 成分を除いて全て 0 のとき、行列式は (1,1) 成分と残りの行列の行列式との積になる。

例

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4\times1\times3-4\times2\times(-1) = 4\times(1\times3-2\times(-1)) = 4\times5 = 20$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4\times5 = 20$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\times\begin{vmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\times(-1)\times\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\times(-1)\times6 = -18$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\times(-1)\times\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\times(-1)\times3\times1 = -6$$

三角行列の行列式は、対角成分の積に等しい。

6) ある行（列）の成分を 2 つの量に分けると、行列式はそれぞれの量を成分とした 2 つの行列式の和に等しい（本年度省略）

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1-4 & 1-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = (-1)+6 = 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+0 & 3-1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 8+(-3) = 5$$

7) 1 つの行（列）の各成分の定数倍を他の行（列）に加え（引い）ても、行列式の値は変わら

ない

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2+1 & 3+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 7, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2+2 & 3+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7$$

説明 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2+1 & 3+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 7$ **（本年度省略）**

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

8) **行列式の積の行列式はそれぞれの行列式の積に等しい**

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \times |\mathbf{B}|$$

例

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$|\mathbf{AB}| = -8 \quad |\mathbf{A}| = -4 \quad |\mathbf{B}| = 2$ **よって** $|\mathbf{AB}| = -8 = |\mathbf{A}| \times |\mathbf{B}|$

例

上記の A の場合、$|\mathbf{AAA}| = (-4)^3 = -64$

2.8 行列の余因子

行列 A の ij 余因子 $\Delta\mathbf{A}_{ij}$ **とは行列 A の ij 成分を除いた行列の行列式の値に** $(-1)^{i+j}$ **を掛けたものである。**

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{のとき}$$

$$\Delta\mathbf{A}_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta\mathbf{A}_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta\mathbf{A}_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{のとき}$$

$$\Delta\mathbf{A}_{11}=(-1)^{1+1}d=d \qquad \Delta\mathbf{A}_{12}=(-1)^{1+2}c=-c$$

$$\Delta\mathbf{A}_{21}=(-1)^{2+1}b=-b \qquad \Delta\mathbf{A}_{22}=(-1)^{2+2}a=a$$

2.9 余因子による行列式の表示

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta\mathbf{A}_{jk}=\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\Delta\mathbf{A}_{kj}=|\mathbf{A}|\boldsymbol{d}_{ij}$$

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{のとき}$$

$$a_{11}\Delta\mathbf{A}_{11}+a_{12}\Delta\mathbf{A}_{12}=ad+b(-c)=|\mathbf{A}|$$

$$a_{11}\Delta\mathbf{A}_{21}+a_{12}\Delta\mathbf{A}_{22}=a(-b)+ba=0$$

他も同様

2.10 逆行列

1) 逆行列とは

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{のとき、以下の行列を考える。}$$

$$\mathbf{B}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

すると

$$\mathbf{AB}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\mathbf{I}$$

$$\mathbf{BA}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\mathbf{I}$$

普通の数： $ab=ba=1 \Leftrightarrow b=a^{-1}$ **逆数**

行列　　： $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$ 　　**逆行列**

行列 A の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ とは、以下の性質を満たすものをいう。

$$\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$$

2) **逆行列の計算**

$$\mathbf{A}(n\times n)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ **の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}(n\times n)$ は以下で与えられる。**

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}{}^{t}\begin{pmatrix} \Delta\mathbf{A}_{11} & \Delta\mathbf{A}_{12} & \cdots & \Delta\mathbf{A}_{1n} \\ \Delta\mathbf{A}_{21} & \Delta\mathbf{A}_{22} & \cdots & \Delta\mathbf{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta\mathbf{A}_{n1} & \Delta\mathbf{A}_{n2} & \cdots & \Delta\mathbf{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} \Delta\mathbf{A}_{11} & \Delta\mathbf{A}_{21} & \cdots & \Delta\mathbf{A}_{n1} \\ \Delta\mathbf{A}_{12} & \Delta\mathbf{A}_{22} & \cdots & \Delta\mathbf{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta\mathbf{A}_{1n} & \Delta\mathbf{A}_{2n} & \cdots & \Delta\mathbf{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

但し、$|\mathbf{A}|\neq 0$ で、ΔA_{ij} は行列 A の ij 余因子

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ **のとき**

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} \Delta\mathbf{A}_{11} & \Delta\mathbf{A}_{21} \\ \Delta\mathbf{A}_{12} & \Delta\mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\text{のとき、}\ \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}\text{のとき、}\ \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{-6}\begin{pmatrix}-4 & 7 & -5\\ 2 & -5 & 1\\ 2 & -8 & 4\end{pmatrix}$$

3) **逆行列の性質**

i) $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{AB}=\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{IB}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{I}$$

同様に、 $\mathbf{AB}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})=\mathbf{I}$

$$\therefore \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}=(\mathbf{AB})^{-1}$$

$$(\mathbf{ABC})^{-1}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

ii) $|\mathbf{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\mathbf{A}|}$

$$|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}|=|\mathbf{A}^{-1}||\mathbf{A}|$$
$$=|\mathbf{I}|=1$$

$$\therefore\ |\mathbf{A}^{-1}|=\frac{1}{|\mathbf{A}|}$$

例

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\qquad \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}|=5\qquad |\mathbf{A}^{-1}|=\frac{1}{5}$$

4) **連立方程式への利用**

$$\begin{aligned}2x_1-2x_2+3x_3&=2\\ x_1+x_2+x_3&=2\\ x_1+3x_2-x_3&=3\end{aligned}\quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax}=\mathbf{Ix}=\mathbf{x}$$
$$=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$
$$\therefore \mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -4 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & -8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

注） $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ で $|\mathbf{A}| \neq 0$ のときは必ず $\mathbf{x} = \mathbf{0}$（自明な解）

行列式が 0 の場合

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

独立な方程式

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &x_3 = 0 \\ &x_1 = -x_2 : \text{未定} \end{aligned}$$

2.11 行列の固有値と固有ベクトル

1. 行列 $\mathbf{A}(n \times n)$ の固有方程式と固有値

$\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$　　λ **：ラムダ**

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2x + y &= \lambda x \\ x + 2y &= \lambda y \end{aligned}$$

これを解くためには、右辺を左辺に持っていき、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この x, y が 0 以外の解を持つためには、

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$　　2 **次方程式**

解　$\lambda = 3, 1$　　**固有値**

一般に

$\mathbf{Au} = l\mathbf{u}$　　$\mathbf{A}(n \times n)$の固有方程式

書き換えて、$(\mathbf{A} - l\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$

この方程式が $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 以外の解を持つためには、

$|\mathbf{A} - l\mathbf{I}| = 0$　　n 次方程式

解　$l = l_1,\ l_2, \cdots,\ l_n$　固有値

2. 固有値と固有ベクトル

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = l\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x + y = lx \\ x + 2y = ly \end{matrix}$$

固有値　$l = 3, 1$

固有値　$l = 3$　に対して、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$$

固有ベクトルの規格化

${}^t\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1 = c^2 + c^2 = 2c^2 = 1$　故に　$c = \pm 1/\sqrt{2}$

$$\mathbf{u}_1 = \pm\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

固有値　$l = 1$　に対して、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y = 0$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}$$

固有ベクトルの規格化

${}^t\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2 = c^2 + c^2 = 2c^2 = 1$　故に　$c = \pm 1/\sqrt{2}$

$$\mathbf{u}_2 = \pm\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

一般に

$\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$　　　固有値　$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

各固有値 λ_i に対して、

$\mathbf{Au}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$　　$\mathbf{u}_i$ ：固有ベクトル

${}^t\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i = 1$　固有ベクトルの規格化

問題　以下の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

1） $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$　　　2） $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

解答

1）　$\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$　が解を持つためには、

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

固有値　$\lambda = 3, 1$

固有値　$\lambda = 3$　に対して、

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$x = -y = c$　規格化して、$\mathbf{u}_1 = \pm\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

固有値　$\lambda = 1$　に対して、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$x = y = c$　規格化して、$\mathbf{u}_2 = \pm\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

2）　$\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$　が解を持つためには、

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

固有値　$\lambda = 4, -1$

$\lambda = 4$　の場合

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x = y = c$　規格化して　$\mathbf{u}_1 = \pm\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$　の場合

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x = c,\ y = -\frac{2}{3}c$　規格化して　$\mathbf{u}_2 = \pm\begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} \end{pmatrix}$

3. 固有ベクトルの性質

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ の場合

$$\mathbf{u}_1=\pm\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_2=\pm\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$^t\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1={}^t\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2=1,\quad {}^t\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2=\pm\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ の場合

$$^t\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1={}^t\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2=1,\quad {}^t\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2=\pm\left(\frac{3}{\sqrt{26}}-\frac{2}{\sqrt{26}}\right)=\frac{\pm 1}{\sqrt{26}}\neq 0$$

一般的性質

実対称行列の異なる固有値に関する固有ベクトルは直交する。

証明

$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = l_i\mathbf{u}_i$ の左から固有値 l_j に関する固有ベクトル $^t\mathbf{u}_j$ をかけて、

$$^t\mathbf{u}_j\mathbf{A}\mathbf{u}_i = l_i\,{}^t\mathbf{u}_j\mathbf{u}_i$$
$$={}^t\mathbf{u}_j\,{}^t\mathbf{A}\mathbf{u}_i = l_j\,{}^t\mathbf{u}_j\mathbf{u}_i$$

よって、$(l_i - l_j)\,{}^t\mathbf{u}_j\mathbf{u}_i=0$

$l_i\neq l_j$ のとき、$^t\mathbf{u}_j\mathbf{u}_i=0$

4. 直交行列による対角化

例

行列　$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ の規格化された固有ベクトル、$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$　を用いて、

以下の行列を考える。

$$\mathbf{U}=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

固有ベクトルの性質により、この行列には以下の関係がある。

$$^t\mathbf{U}\mathbf{U}=\mathbf{I}$$

この関係を満たす行列を直交行列という。

この行列を用いると、行列 **A** は以下のように対角化される。

$$ {}^t\mathbf{UAU} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} $$

ここで、対角成分は固有値となっている。

一般的性質

実対称行列 A はある直交行列 U によって以下のように対角化される。その際、対角成分には A の固有値 $l_1,\ l_2, \cdots,\ l_n$ が並ぶ。

$$ {}^t\mathbf{UAU} = \mathbf{W} = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_n \end{pmatrix} $$

行列 U はそれぞれの固有値に対応する規格化された固有ベクトルを以下のように並べたものである。

$$ \mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n) $$

注意

固有値に同じものが k 個ある場合は、固有ベクトル u の自由に選べる成分の数が k 個になり、k 種類の独立な固有ベクトルが選べる。これらは 1 次変換で互いに直交するように書きかえることができる（Schmidt の直交化）。

重根の場合の例

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ **について、**

${}^t\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1 = {}^t\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2 = 1$，　$z = {}^t\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 = {}^t\mathbf{u}_2\mathbf{u}_1 \neq 0$　**とする。**

$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$，　$\mathbf{v}_2 = a\mathbf{u}_2 + b\mathbf{u}_1$　**とおくと、**

$$ {}^t\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = {}^t\mathbf{u}_1(a\mathbf{u}_2 + b\mathbf{u}_1) = az + b = 0 $$

$$ {}^t\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2 = a^2 + b^2 + 2abz = a^2 + a^2z^2 - 2a^2z^2 = a^2(1 - z^2) = 1 $$

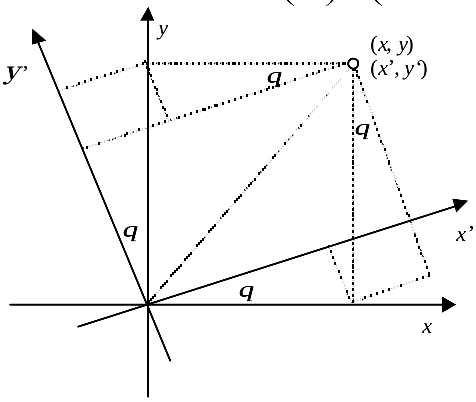
よって、 $a = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$，　$b = \dfrac{-z}{\sqrt{1-z^2}}$

以上より、 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$，　$\mathbf{v}_2 = \dfrac{\mathbf{u}_2 - z\mathbf{u}_1}{\sqrt{1-z^2}}$

5. **２次形式と対角化**

準備１　座標系の回転

$$x' = \cos q\, x + \sin q\, y \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos q & \sin q \\ -\sin q & \cos q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$y' = -\sin q\, x + \cos q\, y$$



準備２　２次形式　　$z = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = {}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}$　　${}^t\mathbf{A} = \mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

２次曲線

楕円　　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

双曲線　　$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$

xy**の項がない場合の座標軸を主軸という。**

行列表示にすると、

楕円　　${}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 1$　　$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{pmatrix}$　　$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

双曲線　　${}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = \pm 1$　　$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & -1/b^2 \end{pmatrix}$　　$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

非対角成分が0**でない**$x^2 + xy + y^2 = 1$**の場合、楕円か、双曲線か？**

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$**,**　$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$**とすると、**${}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 1$

行列 A の固有値 $l_1,\ l_2$**、規格化された固有ベクトル**$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$**を求め、**

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & \pm1\\ 1 & \mp1\end{pmatrix}、\qquad 4種類ある$$

このうち、$\mathbf{U}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ を選び、

$\mathbf{U}\,{}^t\mathbf{U}={}^t\mathbf{U}\mathbf{U}=\mathbf{I}$ 　より、

$${}^t\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}={}^t\mathbf{x}\mathbf{I}\mathbf{A}\mathbf{I}\mathbf{x}=({}^t\mathbf{x}\mathbf{U})({}^t\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U})({}^t\mathbf{U}\mathbf{x})={}^t\mathbf{x}'\mathbf{W}\mathbf{x}'=1$$

$$\begin{aligned}\mathbf{W}&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3/2 & 3/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}3/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}={}^t\mathbf{U}\mathbf{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(x+y)/\sqrt{2}\\ (-x+y)/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

これは座標の回転とみなされ、

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos q & \sin q\\ -\sin q & \cos q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cos q & \sin q\\ -\sin q & \cos q\end{pmatrix}={}^t\mathbf{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

座標系を $q=\dfrac{p}{4}$ 回転すると、$\dfrac{3}{2}x'^2+\dfrac{1}{2}y'^2=1$ 　となり、

楕円であることが分かる。

直交行列の4つの任意性は、主軸の選び方に対応する。

問題

以下の方程式は楕円を表しているか、双曲線を表しているか判定せよ。また、座標軸を主軸にするためにはどれだけ回転させればよいか。

1）$x^2+3xy+y^2=1$ 　　2）$7x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2=8$

解答

1）

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 3/2 & 1\end{pmatrix}$ より、

固有値は、 $t^2-2t-\frac{5}{4}=(t-\frac{5}{2})(t+\frac{1}{2})=0$ $\lambda_1=\frac{5}{2}$**，** $\lambda_2=-\frac{1}{2}$

$\frac{5}{2}x'^2-\frac{1}{2}y'^2=1$ **これは、双曲線を表している。**

規格化された固有ベクトルは $\mathbf{u}_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$$\mathbf{U}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & \pm1\\1 & \mp1\end{pmatrix}$$

特に、 $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}={}^t\mathbf{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$**として、回転角は** $\theta=\frac{\pi}{4}$

2）

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}7 & 2\sqrt{3}\\2\sqrt{3} & 5\end{pmatrix}$**より、**

固有値は、 $t^2-12t+32=(t-8)(t-4)=0$ $\lambda_1=8$**，** $\lambda_2=4$

$8x'^2+4y'^2=8$ （$x'^2+\frac{y'^2}{2}=1$） **これは楕円を表わしている。**

規格化された固有ベクトルは $\mathbf{u}_1=\pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2=\pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$$\mathbf{U}=\pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \pm1\\1 & \mp\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

特に、 $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}={}^t\mathbf{U}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\-1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$**として、回転角は** $\theta=\frac{\pi}{6}$