3. 4　指数関数　【動画】

1.　指数の性質

ここでは一般に a^x で表される指数関数の規則や性質について、見て行きたいと思います。まず指数計算の規則を考えましょう。

１）$a^m \times a^n = a^{m+n}$

以下の計算を見てください。

$$2^1 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8 = 2^3$$

$$2^2 \times 2^3 = 4 \times 8 = 32 = 2^5$$

これらから、ひとつの規則が推測されます。それは、以下のような関係です。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

これは、m, n が自然数（1, 2, 3, …）の場合に成り立ったものですが、これがすべての数に拡張できると考えることにしましょう。

２）$a^0 = 1$

次の例を見て下さい。計算は１）のルールに従いました。

$$2^0 \times 2^3 = 2^{0+3} = 2^3 \qquad \text{ゆえに、} 2^0 = 1$$

同様に考えるとすべての正の数 a に対して上の計算は成り立ちます。即ち、1)のルールに従うと以下のように考えるのが自然です。

$$a^0 = 1$$

３）$a^{-n} = 1/a^n$

次の例は指数部分が負の場合です。計算は 1) と 2) のルールに従っています。

$$2^3 \times 2^{-3} = 2^{3-3} = 2^0 = 1 \qquad \text{ゆえに、} 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

これから、指数部分が負の場合は正にして分母に移ることが分かりました。一般に以下のような規則が導かれます。

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

４）$(a^m)^n = a^{m \times n}$

最後に 1) のルールから離れて、以下の計算を見てみましょう。

$$(2^2)^3 = 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^6$$

これから一般に以下のルールになることが分かります。

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

このルールも一般の数に拡張します。これを使うと $(2^{1/2})^2 = 2^1 = 2$ となり、2 乗して 2 になることから、$2^{1/2} = \sqrt{2}$ であることになります。これは、$2^{1/2} \times 2^{1/2} = 2^1 = 2$ の計算とも合っています。

以下に結果をまとめておきましょう。

公式

1） $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2） $a^0 = 1$

3） $a^{-n} = 1/a^n$

4） $(a^m)^n = a^{m\times n}$　　　特に、$a^{1/2} = \sqrt{a}$

問題 1

以下の値を求めよ。

1） $3^2 =$

2） $2^{-1} =$

3） $9^{0.5} =$

4） $0.678^0 =$

5） $2^2 \times 2^{-3} =$

6） $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} =$

問題 1 解答

1） $3^2 = 3\times 3 = 9$

2） $2^{-1} = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$

3） $9^{0.5} = \sqrt{9} = 3$

4） $0.678^0 = 1$　（0 乗は 1）

5） $2^2 \times 2^{-3} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

6） $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{1}\right)^{2} = 3^2 = 9$

2.　指数関数のグラフ

ここでは $y = a^x$（$a > 0$）で表される指数関数のグラフについて、例を使って考えてみましょう。ソフトへの入力は、2^x,（1/2）^x, 2^(-x)（負の場合は括弧を付ける）のようにします。

例　$y = 2^x$，　$y = 3^x$　のグラフ

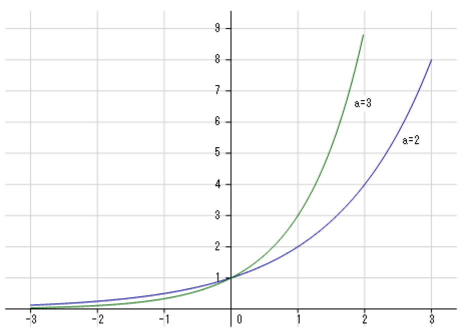

図 1　$y = 2^x, y = 3^x$（グラフの y 軸は 0 から 9 に設定してあります）

例　$y=(1/2)^x=1/2^x=2^{-x}$，　$y=(1/3)^x=1/3^x=3^{-x}$　のグラフ

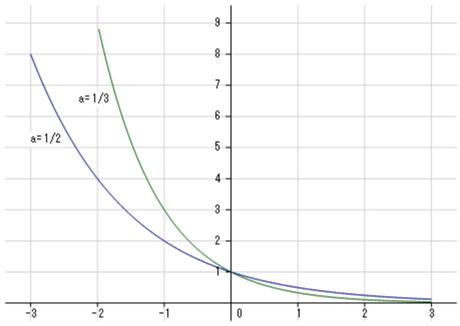

図 2　$y=(1/2)^x$，$y=(1/3)^x$（グラフの y 軸は 0 から 9 に設定してあります）

このグラフで分かることは、

　$a>1$ のときは右上がり（傾きは $x>0$ で急激に変化）

　$(0<)a<1$ のときは右下がり（傾きは $x<0$ で急激に変化）

重要な式と値

$y=a^x$ で非常に重要な a の値があります。それは、ネーピアの数と呼ばれる値です。

　　$y=e^x$（<u>ネーピアの数</u>　$e=2.71828\cdots$）

特にこの関数を Excel などでも、exp(x) と表します。C.Analysis も同様に exp(x) で表しますが、ネーピアの数を ep で表しますので、ep^x でも同じです。exp は exponential（指数関数的）の略です。

　この数の特徴として、以下のグラフのように、$x=0$ での接線の傾きが 1（接線の式は $y=x+1$）になります。

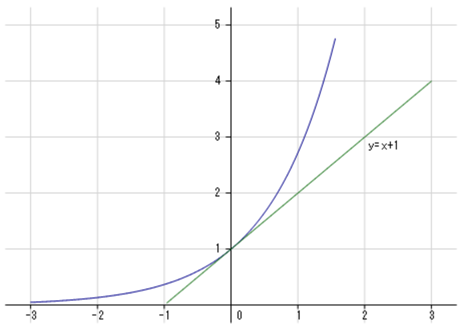

図 3　$y=e^x$（グラフの y 軸は 0 から 5 に設定してあります）

この段階で、この特徴は特に気を引くようなものではありませんが、後に勉強する微分のところでかなり重要になってきます。

問題２　グラフと接線

以下のグラフを描いて、$x=0$ での接線の式を求めよ。

$y=2^x$　　　　　　　接線の式　$y=$

問題２解答

接線の式　$y=0.693x+1$

　まずグラフ描画画面のテキストに 2^x を書いてグラフを表示します。次に、下の方にある「接線」ボタンの左の「x:」に 0 を入れます。その後、「接線」ボタンをクリックすると下のテキストボックスに（y=）「0.693*x+1.000」と表示されます。これが接線を表す式で、隣の「追加」ボタンで、グラフ描画に追加され、描画すると以下のようなグラフになります。

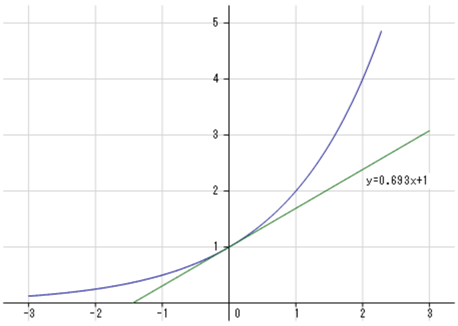

図４　$y=2^x$（グラフの y 軸は 0 から 5 に設定してあります）

演習１　以下の値を求めよ。

１）$4^2=$　　　　　　　　２）$5^{-1}=$

３）$16^{0.5}=$　　　　　　４）$5.239^0=$

演習２　以下のグラフは右上がりか、右下がりか。

１）$y=4^x$　　　　　　右［上がり・下がり］

２）$y=0.2^x$　　　　　右［上がり・下がり］

３）$y=4^{-x}=(1/4)^x$　　右［上がり・下がり］

４）$y=1.5^{x-1}-2$　　　右［上がり・下がり］